Didáctica de las Matemáticas para Maestros

Proyecto *Edumat-Maestros*

Director: Juan D. Godino

http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

PARA MAESTROS

Dirección: Juan D. Godino

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS PARA
MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-933517-1-7
Depósito Legal: GR-1162-2004

Impresión:
GAMI, S. L. Fotocopias
Avda. de la Constitución, 24. Granada

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Publicación realizada en el marco del
Proyecto de Investigación y Desarrollo
del Ministerio de Ciencia y Tecnología
y Fondos FEDER, BSO2002-02452.

Índice general

I.

FUNDAMENTOS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Vicenç Font

Índice

CAPÍTULO 2:
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Página

CAPÍTULO 3:
CURRÍCULO MATEMÁTICO PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

CAPÍTULO 4:
RECURSOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

Página

INTRODUCCIÓN

En esta Monografía sobre "*Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*" nos proponemos ofrecer una visión general de la educación matemática. Tratamos de crear un espacio de reflexión y estudio sobre las matemáticas, en cuanto objeto de enseñanza y aprendizaje, y sobre los instrumentos conceptuales y metodológicos de índole general que la Didáctica de las Matemáticas está generando como campo de investigación.

Deseamos que los maestros en formación adquieran una visión de la enseñanza de las matemáticas que contemple:[1]

- Las clases como comunidades matemáticas, y no como una simple colección de individuos.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
- El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.
- La formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas, descartando el énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas.
- La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Los siguientes principios de la enseñanza de las matemáticas descritos en los Principios y Estándares 2000 del NCTM[2] orientan el contenido de la Monografía:

1. *Equidad*. La excelencia en la educación matemática requiere equidad – unas altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.
2. *Currículo*. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.

---

[1] NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[2] NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston. VA: National Council of Teachers of Mathematics.

3. *Enseñanza*. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprensión de lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender, y por tanto les desafían y apoyan para aprenderlas bien.
4. *Aprendizaje*. Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
5. *Evaluación*. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
6. *Tecnología*. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Estos seis principios describen cuestiones cruciales que, aunque no sean específicas de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas. Deben ser tenidos en cuenta en el desarrollo de propuestas curriculares, la selección de materiales, la planificación de unidades didácticas, el diseño de evaluaciones, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores.

El primer capítulo está centrado en el análisis del propio contenido matemático, con la finalidad de hacer reflexionar a los maestros en formación sobre sus propias creencias y actitudes hacia las matemáticas e inducir en ellos una visión constructiva y sociocultural de las mismas. Tras presentar una síntesis del papel que las matemáticas desempeñan en la ciencia, la tecnología y en la vida cotidiana describimos algunos rasgos característicos de las matemáticas, tomando como referencia las orientaciones del currículo básico de matemáticas propuesto por el MEC. Destacamos el carácter evolutivo del conocimiento matemático, el papel de la resolución de problemas y la modelización, el razonamiento, lenguaje y comunicación, la estructura lógica y naturaleza relacional de las matemáticas, así como la dialéctica entre exactitud y aproximación. En este capítulo también describimos las tres categorías básicas de contenidos que propone el Diseño Curricular Básico (conceptos, procedimientos y actitudes), y razonamos que el análisis de la actividad matemática y de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las clases requiere adoptar un modelo epistemológico más detallado, considerando como objetos matemáticos las propias situaciones - problemas, el lenguaje, las propiedades y argumentaciones, además de los conceptos y procedimientos. Junto a estos objetos matemáticos es necesario tener en cuenta en la organización de la enseñanza los *procesos matemáticos* de resolución de problemas, representación, comunicación, justificación, conexiones e institucionalización.

El segundo capítulo lo dedicamos al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, comenzando con una situación de contextualización sobre las creencias de los maestros en formación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de nuestra materia. Hemos considerado necesario iniciar el tema con un breve análisis de las nociones de competencia y comprensión matemática, esto es, sobre lo que vamos a considerar como "conocer matemáticas" desde el punto de vista del sujeto que aprende. No parece posible tomar decisiones educativas apropiadas si no adoptamos previamente criterios claros sobre lo que vamos a considerar qué es "saber matemáticas".

Sin privar de importancia a los enfoques constructivistas en el estudio de las matemáticas consideramos necesario reconocer explícitamente el papel crucial del profesor en la organización, dirección y promoción de los aprendizajes de los estudiantes. Una instrucción matemática significativa debe atribuir un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso del profesor, a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El maestro en formación debe ser consciente de la complejidad de la tarea de la enseñanza si se desea lograr un aprendizaje matemático significativo. Será necesario diseñar y gestionar una variedad de tipos de situaciones didácticas, implementar una variedad de patrones de interacción y tener en cuenta las normas, con frecuencia implícitas, que regulan y condicionan la enseñanza y los aprendizajes. Finalizamos el desarrollo de los conocimientos del capítulo 2 con información sobre los tipos de dificultades, errores y obstáculos en el estudio de las matemáticas y una síntesis de los "Estándares para la enseñanza de las matemáticas", elaborados por la prestigiosa sociedad NCTM de profesores de matemáticas de EE.UU.

El tercer capítulo está dedicado al estudio del currículo de matemáticas, al nivel de propuestas curriculares básicas y de programación de unidades didácticas. Presentamos una síntesis de las orientaciones curriculares del MEC para el área de matemáticas, incluyendo los fines y objetivos, contenidos y evaluación, así como las principales características de los Principios y Estándares para las matemáticas escolares del NCTM. Esta información aportará a los maestros en formación una visión complementaria y crítica, tanto de las orientaciones propuestas a nivel del estado español como de las respectivas comunidades autonómicas. Respecto del diseño y gestión de unidades didácticas describimos los principales elementos a tener en cuenta en la planificación, gestión y evaluación de las unidades, así como las correspondientes adaptaciones curriculares para alumnos con necesidades específicas.

El último capítulo incluido en la Monografía lo dedicamos al estudio de los recursos didácticos utilizables en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Presentamos una perspectiva general de los recursos, incluyendo desde los libros de texto, materiales manipulativos, gráficos y textuales, hasta los recursos tecnológicos (calculadoras, ordenadores, internet, etc.). El maestro en formación debe lograr una actitud propicia al uso de materiales manipulativos de toda índole, incardinados como elementos de las situaciones didácticas, pero al mismo tiempo es necesario que construya una actitud crítica al uso indiscriminado de tales recursos. Razonamos que el material manipulativo (sea tangible o gráfico-textual) puede ser un puente entre la realidad y los objetos matemáticos, pero es necesario adoptar precauciones para no caer en un empirismo ciego ni en un formalismo estéril.

En cuanto a las referencias bibliográficas hemos adoptado el criterio de incluir a pié de página las principales fuentes documentales que hemos utilizado de manera directa. Al final de cada capítulo hemos añadido alguna bibliografía que consideramos de interés como complemento y que son accesibles para el maestro en formación.

Cada capítulo ha sido estructurado en tres secciones. En la primera sección, que denominamos C*ontextualización*, proponemos una situación inicial de reflexión y discusión colectiva sobre un aspecto del tema, En la segunda, *Desarrollo de conocimientos*, presentamos las principales posiciones e informaciones, así como una colección de actividades o tareas intercaladas en el texto que pueden servir como situaciones introductorias a los distintos apartados, o bien como complemento y evaluación del estudio. La tercera sección, *Seminario didáctico*, incluye una colección de "problemas de didáctica de las matemáticas" que amplían la reflexión y el análisis de los conocimientos propuestos en cada tema.

Esperamos que este texto, que hemos intentado que sea a la vez riguroso y de lectura asequible, pueda servir a los futuros maestros para aumentar su interés por las matemáticas y su enseñanza

Los autores

Capítulo 1

PERSPECTIVA EDUCATIVA DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN COLECTIVA SOBRE LAS PROPIAS CREENCIAS HACIA LAS MATEMÁTICAS

Consigna:

A continuación se presentan algunos enunciados que reflejan diferentes modos de pensar sobre las matemáticas, el conocimiento matemático y la habilidad para hacer matemáticas.

1) Completa el cuestionario, leyendo con atención los enunciados e indicando el grado de acuerdo con cada uno de ellos, mediante un valor numérico, siguiendo el convenio presentado.
2) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Cuestionario[1]

Indica tu grado de acuerdo con cada enunciado, según el siguiente convenio: 1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Las matemáticas son esencialmente un conjunto de conocimientos (hechos, reglas, fórmulas y procedimientos socialmente útiles).

   1 2 3 4 5

2. Las matemáticas son esencialmente una manera de pensar y resolver problemas.

   1 2 3 4 5

3. Se supone que las matemáticas no tienen que tener significado.

   1 2 3 4 5

4. Las matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.

   1 2 3 4 5

5. La eficacia o dominio de las matemáticas se caracteriza por una habilidad en conocer hechos aritméticos o de hacer cálculos rápidamente.

   1 2 3 4 5

6. El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.

[1] Baroody, A. J. y Coslick, R. T. (1998). Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction..London: Lawrence Erlbaum Ass. (p. 1-8)

1	2	3	4	5

7. Las matemáticas están siempre bien definidas; no están abiertas a cuestionamientos, argumentos o interpretaciones personales.

1	2	3	4	5

8. La habilidad matemática es esencialmente algo con lo que se nace o no se nace.

1	2	3	4	5

7. Los matemáticos trabajan típicamente aislados unos de otros.

1	2	3	4	5

B: Desarrollo de conocimientos

1. ALGUNAS CONCEPCIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS

En la reflexión sobre las propias concepciones hacia las matemáticas habrán surgido diversas opiniones y creencias sobre las matemáticas, la actividad matemática y la capacidad para aprender matemáticas. Pudiera parecer que esta discusión está muy alejada de los intereses prácticos del profesor, interesado fundamentalmente por cómo hacer más efectiva la enseñanza de las matemáticas (u otro tema) a sus alumnos. La preocupación sobre qué es un cierto conocimiento, forma parte de la *epistemología o teoría del conocimiento*, una de las ramas de la filosofía.

Sin embargo, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas son un factor que condiciona la actuación de los profesores en la clase, como razonamos a continuación.

- Supongamos, por ejemplo, que un profesor cree que los objetos matemáticos tienen una existencia propia (incluso aunque esta "existencia" sea no material). Para él, objetos tales como "triángulo", "suma", "fracciones", "probabilidad", existen, tal como lo hacen los elefantes o los planetas. En este caso, sólo tenemos que ayudar a los niños a "descubrirlos", ya que son independientes de las personas que los usan y de los problemas a los que se aplican, e incluso de la cultura.

  Para este profesor, la mejor forma de enseñar matemáticas sería la presentación de estos objetos, del mismo modo que la mejor forma de hacer que un niño comprenda qué es un elefante es llevarlo al zoológico, o mostrarle un vídeo sobre la vida de los elefantes.

  ¿Cómo podemos mostrar lo que es un círculo u otro objeto matemático? La mejor forma sería enseñar sus definiciones y propiedades, esto es lo que este profesor consideraría "saber matemáticas". Las aplicaciones de los conceptos o la resolución de problemas matemáticos serían secundarios para este profesor. Éstas se tratarían después de que el alumno hubiera aprendido las matemáticas.

> 1. Para los siguientes objetos matemáticos, razona si su existencia es o no independiente de la cultura: a) sistema de numeración; b) unidades de medida; c) notación algebraica.

- Otros profesores consideran las matemáticas como un resultado del ingenio y la actividad humana (como algo construido), al igual que la música, o la literatura. Para ellos, las matemáticas se han inventado, como consecuencia de la curiosidad del hombre y su necesidad de resolver una amplia variedad de problemas, como, por ejemplo, intercambio de objetos en el comercio, construcción, ingeniería, astronomía, etc.

  Para estos profesores, el carácter más o menos fijo que hoy día –o en una etapa histórica anterior- tienen los objetos matemáticos, es debido a un proceso de negociación social. Las personas que han creado estos objetos han debido ponerse de acuerdo en cuanto a sus reglas de funcionamiento, de modo que cada nuevo objeto forma un todo coherente con los anteriores.

Por otro lado, la historia de las matemáticas muestra que las definiciones, propiedades y teoremas enunciados por matemáticos famosos también son falibles y están sujetos a evolución. De manera análoga, el aprendizaje y la enseñanza deben tener en cuenta que es natural que los alumnos tengan dificultades y cometan errores en su proceso de aprendizaje y que se puede aprender de los propios errores. Esta es la posición de las teorías psicológicas constructivistas sobre el aprendizaje de las matemáticas, las cuales se basan a su vez en la visión filosófica sobre las matemáticas conocida como *constructivismo social*.

2. Busca algún episodio de historia de las matemáticas en que se muestre cómo un concepto ha evolucionado.

1.1. Concepción idealista-platónica

Entre la gran variedad de creencias sobre las relaciones entre las matemáticas y sus aplicaciones y sobre el papel de éstas en la enseñanza y el aprendizaje, podemos identificar dos concepciones extremas.

Una de estas concepciones, que fue común entre muchos matemáticos profesionales hasta hace unos años, considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma axiomática. Se supone que una vez adquirida esta base, será fácil que el alumno por sí solo pueda resolver las aplicaciones y problemas que se le presenten.

Según esta visión no se puede ser capaz de aplicar las matemáticas, salvo en casos muy triviales, si no se cuenta con un buen fundamento matemático. La matemática pura y la aplicada serían dos disciplinas distintas; y las estructuras matemáticas abstractas deben preceder a sus aplicaciones en la Naturaleza y Sociedad. Las aplicaciones de las matemáticas serían un "apéndice" en el estudio de las matemáticas, de modo que no se producirían ningún perjuicio si este apéndice no es tenido en cuenta por el estudiante. Las personas que tienen esta creencia piensan que las matemáticas son una disciplina autónoma. Podríamos desarrollar las matemáticas sin tener en cuenta sus aplicaciones a otras ciencias, tan solo en base a problemas internos a las matemáticas.

Esta concepción de las matemáticas se designa como "idealista-platónica". Con esta concepción es sencillo construir un currículo, puesto que no hay que preocuparse por las aplicaciones en otras áreas. Estas aplicaciones se “filtrarían”, abstrayendo los conceptos, propiedades y teoremas matemáticos, para constituir un dominio matemático “puro”.

3. Consulta algunos libros de texto destinados a estudiantes de secundaria o de primeros cursos de Universidad y escritos en los años 70 y 80. Compara con algunos libros recientes destinados a los mismos alumnos. ¿Puedes identificar si la concepción del autor del texto sobre las matemáticas es de tipo platónico? ¿Cómo lo deduces?

1.2. Concepción constructivista

Otros matemáticos y profesores de matemáticas consideran que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo. Piensan que es importante mostrar a los alumnos la necesidad de cada parte de las matemáticas antes de que les sea presentada. Los alumnos deberían ser capaces de ver cómo cada parte de las matemáticas satisfacen una cierta necesidad.

Ejemplo:

> Poniendo a los niños en situaciones de intercambio les creamos la necesidad de *comparar, contar y ordenar* colecciones de objetos. Gradualmente se introducen los números naturales para atender esta necesidad

En esta visión, las aplicaciones, tanto externas como internas, deberían preceder y seguir a la creación de las matemáticas; éstas deben aparecer como una respuesta natural y espontánea de la mente y el genio humano a los problemas que se presentan en el entorno físico, biológico y social en que el hombre vive. Los estudiantes deben ver, por sí mismos, que la axiomatización, la generalización y la abstracción de las matemáticas son necesarias con el fin de comprender los problemas de la naturaleza y la sociedad. A las personas partidarias de esta visión de las matemáticas y su enseñanza les gustaría poder comenzar con algunos problemas de la naturaleza y la sociedad y construir las estructuras fundamentales de las matemáticas a partir de ellas. De este modo se presentaría a los alumnos la estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones.

La elaboración de un currículo de acuerdo con la concepción constructivista es compleja, porque, además de conocimientos matemáticos, requiere conocimientos sobre otros campos. Las estructuras de las ciencias físicas, biológicas, sociales son relativamente más complejas que las matemáticas y no siempre hay un isomorfismo con las estructuras puramente matemáticas. Hay una abundancia de material disperso sobre aplicaciones de las matemáticas en otras áreas, pero la tarea de selección, secuenciación e integración no es sencilla.

4. ¿Por qué son necesarios los conceptos de longitud y área? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Qué otros conceptos, operaciones y propiedades se les asocian?

2. MATEMÁTICAS Y SOCIEDAD

Cuando tenemos en cuenta el tipo de matemáticas que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre dos fines importantes de esta enseñanza:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de las matemáticas en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que las matemáticas han contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método matemático, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de las matemáticas permite responder, las formas básicas de razonamiento y del trabajo matemático, así como su potencia y limitaciones.

2.1. ¿Cómo surgen las matemáticas? Algunas notas históricas

La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (o internos a las propias matemáticas) y su interrelación con otros conocimientos.

Ejemplo:

Los orígenes de la estadística son muy antiguos, ya que se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción en las civilizaciones china (aproximadamente 1000 años a. C.), sumeria y egipcia. Incluso en la Biblia, en el libro de *Números* aparecen referencias al recuento de los israelitas en edad de servicio militar. No olvidemos que precisamente fue un censo, según el Evangelio, lo que motivó el viaje de José y María a Belén. Los censos propiamente dichos eran ya una institución en el siglo IV a.C. en el imperio romano. Sin embargo, sólo muy recientemente la estadística ha adquirido la categoría de ciencia. En el siglo XVII surge la aritmética política, desde la escuela alemana de Conring. Posteriormente su discípulo Achenwall orienta su trabajo a la recogida y análisis de datos numéricos, con fines específicos y en base a los cuales se hacen estimaciones y conjeturas, es decir se observan ya los elementos básicos del método estadístico.

La estadística no es una excepción y, al igual que ella, otras ramas de las matemáticas se han desarrollado como respuesta a problemas de índole diversa:

- Muchos aspectos de la geometría responden en sus orígenes históricos, a la necesidad de resolver problemas de agricultura y de arquitectura.
- Los diferentes sistemas de numeración evolucionan paralelamente a la necesidad de buscar notaciones que permitan agilizar los cálculos aritméticos.
- La teoría de la probabilidad se desarrolla para resolver algunos de los problemas que plantean los juegos de azar.

Las matemáticas constituyen el armazón sobre el que se construyen los modelos científicos, toman parte en el proceso de modelización de la realidad, y en muchas ocasiones han servido como medio de validación de estos modelos. Por ejemplo, han sido cálculos matemáticos los que permitieron, mucho antes de que pudiesen ser observados, el descubrimiento de la existencia de los últimos planetas de nuestro sistema solar.

Sin embargo, la evolución de las matemáticas no sólo se ha producido por acumulación de conocimientos o de campos de aplicación. Los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo, adquiriendo relevancia o, por el contrario, siendo relegados a segundo plano.

Ejemplos

- El cálculo de probabilidades se ha transformado notablemente, una vez que se incorporaron conceptos de la teoría de conjuntos en la axiomática propuesta por Kolmogorov. Este nuevo enfoque permitió aplicar el análisis matemático a la probabilidad, con el consiguiente avance de la teoría y sus aplicaciones en el último siglo.
- El cálculo manual de logaritmos y funciones circulares (senos, cosenos, etc.) fue objeto de enseñanza durante muchos años y los escolares dedicaron muchas horas al aprendizaje de algoritmos relacionados con su uso. Hoy las calculadoras y ordenadores producen directamente los valores de estas funciones y el cálculo manual ha desaparecido. El mismo proceso parece seguir actualmente el cálculo de raíces cuadradas.

2.2. Papel de las matemáticas en la ciencia y tecnología

Las aplicaciones matemáticas tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Si queremos que el alumno valore su papel, es importante que los ejemplos y situaciones que mostramos en la clase hagan ver, de la forma más completa posible, el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar.

2.2.1. Nuestro mundo biológico

Dentro del campo biológico, puede hacerse notar al alumno que muchas de las características heredadas en el nacimiento no se pueden prever de antemano: sexo, color de pelo, peso al nacer, etc. Algunos rasgos como la estatura, número de pulsaciones por minuto, recuento de hematíes, etc., dependen incluso del momento en que son medidas. La probabilidad permite describir estas características.

En medicina se realizan estudios epidemiológicos de tipo estadístico. Es necesario cuantificar el estado de un paciente (temperatura, pulsaciones, etc.) y seguir su evolución, mediante tablas y gráficos, comparándola con los valores promedios en un sujeto sano. El modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre es un ejemplo de situaciones basadas en el razonamiento proporcional, así como en la idea de muestreo.

Cuando se hacen predicciones sobre la evolución de la población mundial o sobre la posibilidad de extinción de las ballenas, se están usado modelos matemáticos de crecimiento de poblaciones, de igual forma que cuando se hacen estimaciones de la propagación de una cierta enfermedad o de la esperanza de vida de un individuo.

Las formas de la naturaleza nos ofrecen ejemplos de muchos conceptos geométricos, abstraídos con frecuencia de la observación de los mismos.

El crecimiento de los alumnos permite plantear actividades de medida y ayudar a los alumnos a diferenciar progresivamente las diferentes magnitudes y a estimar cantidades de las mismas: peso, longitud, etc.

2.2.2. El mundo físico

Además del contexto biológico del propio individuo, nos hallamos inmersos en un medio físico. Una necesidad de primer orden es la medida de magnitudes como la temperatura, la velocidad, etc. Por otra pare, las construcciones que nos rodean (edificios, carreteras, plazas, puentes) proporcionan la oportunidad de analizar formas geométricas; su desarrollo ha precisado de cálculos geométricos y estadísticos, uso de funciones y actividades de medición y estimación (longitudes, superficies, volúmenes, tiempos de transporte, de construcción, costes, etc.)

¿Qué mejor fuente de ejemplos sobre fenómenos aleatorios que los meteorológicos?. La duración, intensidad, extensión de las lluvias, tormentas o granizos; las temperaturas máximas y mínimas, la intensidad y dirección del viento son variables aleatorias. También lo son las posibles consecuencias de estos fenómenos: el volumen de agua en un pantano, la magnitud de daños de una riada o granizo son ejemplos en los que se presenta la ocasión del estudio de la estadística y probabilidad.

2.2.3. El mundo social

El hombre no vive aislado: vivimos en sociedad; la familia, la escuela, el trabajo, el ocio están llenos de situaciones matemáticas. Podemos cuantificar el número de hijos de la familia, la edad de los padres al contraer matrimonio, el tipo de trabajo, las creencias o aficiones de los miembros varían de una familia a otra, todo ello puede dar lugar a estudios numéricos o estadísticos.

Para desplazarnos de casa a la escuela, o para ir de vacaciones, dependemos del transporte público. Podemos estimar el tiempo o la distancia o el número de viajeros que usarán el autobús.

En nuestros ratos de ocio practicamos juegos de azar tales como quinielas o loterías. Acudimos a encuentros deportivos cuyos resultados son inciertos y en los que tendremos que hacer cola para conseguir las entradas. Cuando hacemos una póliza de seguros no sabemos si la cobraremos o por el contrario perderemos el dinero pagado; cuando compramos acciones en bolsa estamos expuestos a la variación en las cotizaciones La estadística y probabilidad se revela como herramienta esencial en estos contextos.

2.2.4. El mundo político

El Gobierno, tanto a nivel local como nacional o de organismos internacionales, necesita tomar múltiples decisiones y para ello necesita información. Por este motivo la administración precisa de la elaboración de censos y encuestas diversas. Desde los resultados electorales hasta los censos de población hay muchas estadísticas cuyos resultados afectan las decisiones de gobierno.

Los índices de precios al consumo, las tasas de población activa, emigración - inmigración, estadísticas demográficas, producción de los distintos bienes, comercio, etc., de las que diariamente escuchamos sus valores en las noticias, proporcionan ejemplo de razones y proporciones.

2.2.5 El mundo económico

La contabilidad nacional y de las empresas, el control y previsión de procesos de producción de bienes y servicios de todo tipo no serían posibles sin el empleo de métodos y modelos matemáticos.

En la compleja economía en la que vivimos son indispensables unos conocimientos mínimos de matemáticas financieras. Abrir una cuenta corriente, suscribir un plan de pensiones, obtener un préstamo hipotecario, etc. son ejemplos de operaciones que necesitan este tipo de matemáticas.

2.3. Matemáticas en la vida cotidiana. Cultura matemática

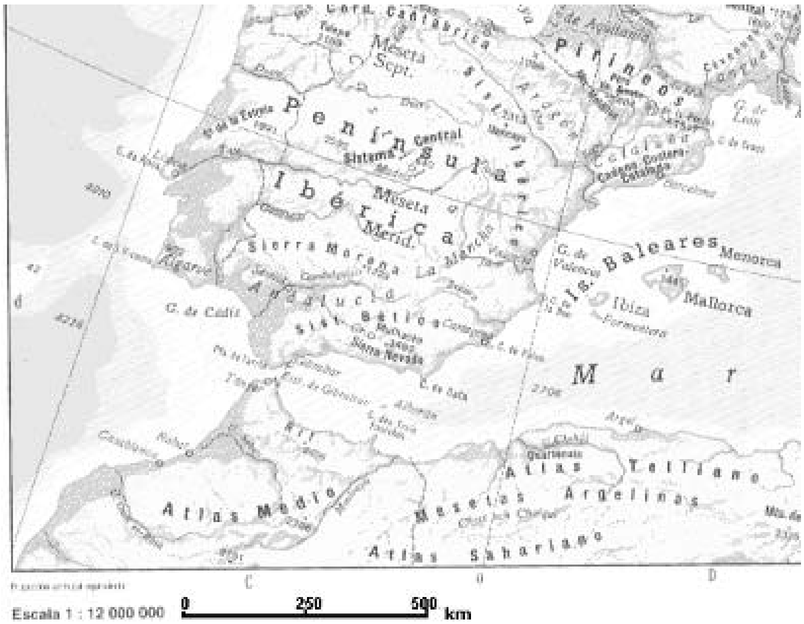
Uno de los fines de la educación es formar ciudadanos cultos, pero el concepto de cultura es cambiante y se amplía cada vez más en la sociedad moderna. Cada vez más se reconoce el papel cultural de las matemáticas y la educación matemática también tiene como fin proporcionar esta cultura. El objetivo principal no es convertir a los futuros ciudadanos en "matemáticos aficionados", tampoco se trata de capacitarlos en cálculos complejos, puesto que los ordenadores hoy día resuelven este problema. Lo que se pretende es proporcionar una cultura con varios componentes interrelacionados:

a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información matemática y los argumentos apoyados en datos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, o en su trabajo profesional.

b) Capacidad para discutir o comunicar información matemática, cuando sea relevante, y competencia para resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional.

5. Las siguientes informaciones han sido tomadas de un mapa, una estación de tren y de la prensa. Indica para cada uno de ellas los conocimientos matemáticos necesarios para una lectura comprensiva

a) Se quiere calcular la distancia real entre Valencia y Casablanca con este mapa



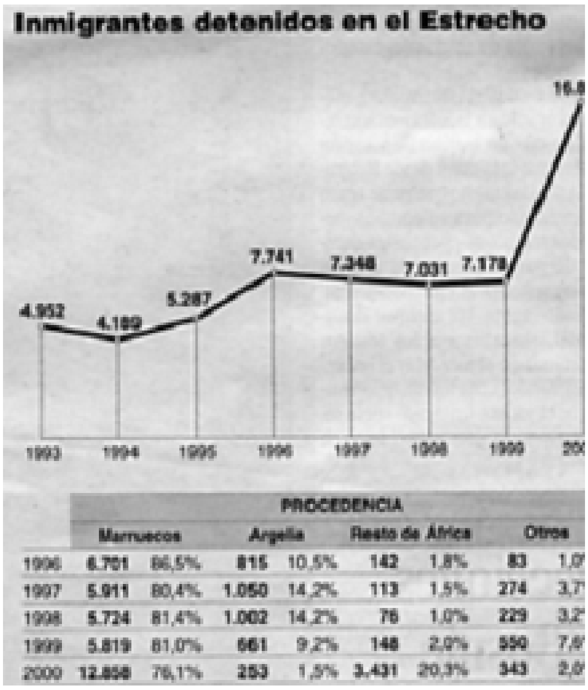
b) En la estación de Granada se anuncia el siguiente horario:

Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Tipo de tren
Granada	22h 10 min.	Barcelona-Sants	9h 50 min.	TALGO

c)

Marca (6/10/2002)

d)



El País (2/10/2002)

3. RASGOS CARACTERÍSTICOS DE LAS MATEMÁTICAS

El Diseño Curricular Base (DCB) para la Educación Primaria (MEC, 1989) ofrece una visión constructivista-social de las matemáticas. En este apartado incluimos un resumen de este documento, que en conjunto permite apreciar los rasgos característicos de esta visión de las matemáticas.

> 6. Contrasta tu propia manera de interpretar el conocimiento matemático con la perspectiva sugerida en los siguientes párrafos. ¿Qué implicaciones suponen para la forma de organizar la clase de matemáticas?

3.1. Modelización y resolución de problemas

El dar un papel primordial a la resolución de problemas y a la actividad de modelización tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Sería cuanto menos contradictorio con la génesis histórica de las matemáticas, al igual que con sus aplicaciones actuales, presentar las matemáticas a los alumnos como algo cerrado, completo y alejado de la realidad. Debe tenerse en cuenta, por una parte, que determinados conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y por otra, que a menudo estos problemas no estrictamente matemáticos en su origen proporcionan la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos.

> 7. En el siguiente problema, ¿cuál es el conocimiento matemático que permite resolverlo? ¿Qué significado intuitivo permite construir sobre dicho conocimiento? Inventa otros problemas sencillos que permitan construir un significado diferenciado para el conocimiento en cuestión.
>
> **Problema.** Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?
>
> 8. ¿Qué contenidos matemáticos serían útiles para resolver los siguientes tipos de problemas:
>
> - Construir a escala la maqueta de un edificio
> - Determinar en forma aproximada la altura de una torre, desde el suelo
> - Calcular el número de lentejas en un paquete de kilo, sin contarlas todas

Desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, las reflexiones anteriores deben concretarse a la edad y conocimientos de los alumnos. No podemos proponer los mismos problemas a un matemático, a un adulto, a un adolescente o a un niño, porque sus necesidades son diferentes. Hay que tener claro que la realidad de los alumnos incluye su propia percepción del entorno físico y social y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que pueden hacerlo las situaciones reales que interesan al adulto.

En consecuencia, la activación del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales no se consigue trasvasando de forma mecánica situaciones "reales", aunque sean muy pertinentes y significativas para el adulto, ya que éstas pueden no interesar a los alumnos.

3.2. Razonamiento matemático

Razonamiento empírico-inductivo

El proceso histórico de construcción de las matemáticas nos muestra la importancia del razonamiento empírico-inductivo que, en muchos casos, desempeña un papel mucho más activo en la elaboración de nuevos conceptos que el razonamiento deductivo.

Esta afirmación describe también la forma en que trabajan los matemáticos, quienes no formulan un teorema “a la primera”. Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías. Esta fase intuitiva es la que convence íntimamente al matemático de que el proceso de construcción del conocimiento va por buen camino. La deducción formal suele aparecer casi siempre en una fase posterior.

Esta constatación se opone frontalmente a la tendencia, fácilmente observable en algunas propuestas curriculares, a relegar los procedimientos intuitivos a un segundo plano, tendencia que priva a los alumnos del más poderoso instrumento de exploración y construcción del conocimiento matemático.

9. Al disponer puntos en el plano en forma cuadrangular y contar el número total de éstos en cada uno de los cuadrados, obtenemos los llamados "números cuadrados": 1, 4, 9, 16, ...

```
*     * *     * * *
      * *     * * *
              * * *
```

a) ¿Podrías escribir los primeros 10 números cuadrados?
b) Llamaremos C_n al número cuadrado cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n ?
c) ¿Puedes dar algún tipo de razonamiento que la justifique?

10. Repite el proceso para los "números triangulares":

```
*   *   *       *
    **  **      **
        ***     ***
                ****
```

11. Analiza el papel del razonamiento empírico-inductivo y deductivo en la resolución de los problemas anteriores

Formalización y abstracción

Desde una perspectiva pedagógica -y también epistemológica-, es importante diferenciar el proceso de construcción del conocimiento matemático de las características de dicho conocimiento en un estado avanzado de elaboración. La formalización, precisión y ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático debe ser la fase final de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla.

Ciertamente, como ciencia constituida, las matemáticas se caracterizan por su precisión, por su carácter formal y abstracto, por su naturaleza deductiva y por su organización a menudo axiomática. Sin embargo, tanto en la génesis histórica como en su apropiación individual por los alumnos, la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas activadas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. La experiencia y comprensión de las nociones, propiedades y relaciones matemáticas a partir de la actividad real es, al mismo tiempo, un paso previo a la formalización y una condición necesaria para interpretar y utilizar correctamente todas las posibilidades que encierra dicha formalización.

3.3. Lenguaje y comunicación

Las matemáticas, como el resto de las disciplinas científicas, aglutinan un conjunto de conocimientos con unas características propias y una determinada estructura y organización internas. Lo que confiere un carácter distintivo al conocimiento matemático es su enorme poder como instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades. Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc,), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa, poniendo de relieve algunos aspectos y relaciones no directamente observables y permitiendo anticipar y predecir hechos situaciones o resultados que todavía no se han producido.

Ejemplo:

Un número par se puede escribir como 2n. Esta expresión es equivalente a (n+1)+(n-1). Pero esta última expresión nos da una nueva información ya que muestra que todo número par es la suma de dos impares consecutivos

Sería sin embargo erróneo, o al menos superficial, suponer que esta capacidad del conocimiento matemático para representar, explicar y predecir hechos, situaciones y resultados es simplemente una consecuencia de la utilización de notaciones simbólicas precisas e inequívocas en cuanto a las informaciones que permiten representar. En realidad, si las notaciones simbólicas pueden llegar a desempeñar efectivamente estos papeles es debido a la propia naturaleza del conocimiento matemático que está en su base y al que sirven de soporte.

> 12. Analiza una página de un libro de matemáticas de primaria. Identifica los diferentes medios de expresión en el texto (términos, símbolos, gráficas, diagramas). Localiza los conceptos implícitos y explícitos a que hacen referencias. ¿Cómo se representan los diferentes conceptos?

16. ¿Cómo podemos comunicar las matemáticas a alumnos ciegos? ¿Piensas que pueden tener dificultades especiales con alguna parte de las matemáticas debido a su carencia?

3.4. Estructura interna

La insistencia sobre la actividad constructiva no supone en ningún caso ignorar que, como cualquier otra disciplina científica, las matemáticas tienen una estructura interna que relaciona y organiza sus diferentes partes. Más aún, en el caso de las matemáticas esta estructura es especialmente rica y significativa.

Hay una componente vertical en esta estructura, la que fundamenta unos conceptos en otros, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje y que obliga, en ocasiones, a trabajar algunos aspectos con la única finalidad de poder integrar otros que son los que se consideran verdaderamente importantes desde un punto de vista educativo. Sin embargo, interesa destacar una vez más que casi nunca existe un camino único, ni tan siquiera uno claramente mejor, y si lo hay tiene una fundamentación más de tipo pedagógico que epistemológico. Por el contrario, determinadas concepciones sobre la estructura interna de las matemáticas pueden llegar incluso a ser funestas para el aprendizaje de las mismas, como ha puesto claramente de relieve el intento de fundamentar toda la matemática escolar en la teoría de conjuntos.

13. Considera los siguientes conjuntos numéricos: números racionales, números naturales, números enteros, números decimales, números primos. ¿Cómo se relacionan entre sí?

14. ¿Por qué en los diseños curriculares, se contempla una enseñanza cíclica de algunos conceptos? Identifica algunos conceptos que aparezcan cíclicamente en los diferentes niveles de la educación primaria.

3.5. Naturaleza relacional

El conocimiento lógico-matemático hunde sus raíces en la capacidad del ser humano para establecer relaciones entre los objetos o situaciones a partir de la actividad que ejerce sobre los mismos y, muy especialmente, en su capacidad para abstraer y tomar en consideración dichas relaciones en detrimento de otras igualmente presentes.

Ejemplo

En las frases “A es más grande que B”, "A mide tres centímetros más que B”, “B mide tres centímetros menos que A", etc., no expresamos una propiedad de los objetos A y B en sí mismos, sino la relación existente entre una propiedad -el tamaño- que comparten ambos objetos y que precisamente es el resultado de la actividad de compararlos en lo que concierne a esta propiedad en detrimento de otras muchas posibles (color forma, masa, densidad volumen, etc.).

Las relaciones *más grande que*, *más pequeño que, tres centímetros más que, tres centímetros menos que,* etc. son pues verdaderas construcciones mentales y no una simple lectura de las propiedades de los objetos. Incluso la referencia a los objetos A y B como grande y pequeño supone una actividad de comparación con elementos más difusos, como pueden ser objetos similares con los que se ha tenido alguna experiencia anterior.

Este sencillo ejemplo muestra hasta qué punto el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas a partir de la actividad sobre los objetos. Las matemáticas son pues más constructivas que deductivas, desde la perspectiva de su elaboración y adquisición. Si desligamos el conocimiento matemático de la actividad constructiva que está en su origen, corremos el peligro de caer en puro formalismo. Perderemos toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción.

Otra implicación curricular de la naturaleza relacional de las matemáticas es la existencia de estrategias o procedimientos generales que pueden utilizarse en campos distintos y con propósitos diferentes.

Ejemplo,

Numerar, contar, ordenar, clasificar, simbolizar, inferir, etc. son herramientas igualmente útiles en geometría y en estadística.

Para que los alumnos puedan percibir esta similitud de estrategias y procedimientos y su utilidad desde ópticas distintas, es necesario dedicarles una atención especial seleccionando cuidadosamente los contenidos de la enseñanza.

3.6. Exactitud y aproximación

Una característica adicional de las matemáticas, que ha ido haciéndose cada vez más patente a lo largo de su desarrollo histórico, es la dualidad desde la que permite contemplar la realidad. Por un lado la matemática es una "ciencia exacta", los resultados de una operación, una transformación son unívocos. Por otro, al comparar la modelización matemática de un cierto hecho de la realidad, siempre es aproximada, porque el modelo nunca es exacto a la realidad. Si bien algunos aspectos de esta dualidad aparecen ya en las primeras experiencias matemáticas de los alumnos, otros lo hacen más tarde.

Es frecuente que las propuestas curriculares potencien exclusivamente una cara de la moneda: la que se ajusta mejor a la imagen tradicional de las matemáticas como ciencia exacta. Así, por ejemplo, se prefiere la matemática de la certeza ("sí" o "no", "verdadero" o "falso") a la de la probabilidad ("es posible que. . . ", "con un nivel de significación de. . . "); la de la exactitud ("la diagonal mide $\sqrt{2}$", "el área de un círculo es πr^2",...) a la de la estimación ("me equivoco como mucho en una décima", "la proporción áurea es aproximadamente 5/3", ...).

Las matemáticas escolares deben potenciar estos dobles enfoques, y ello no sólo por la riqueza intrínseca que encierran, sino porque los que han sido relegados hasta ahora a un segundo plano tienen una especial incidencia en las aplicaciones actuales de las matemáticas.

> 15. ¿Es posible medir con exactitud la longitud de una costa? ¿la cantidad de agua embalsada en un pantano? ¿el nivel de ruido ambiental? Pon otros ejemplos en que la medida sólo puede ser aproximada. ¿Qué interés tiene en estos casos un valor aproximado de la medida?

4. CONTENIDOS MATEMÁTICOS: CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y ACTITUDES

En el Diseño Curricular Base (MEC, 1989) se entiende por contenido escolar tanto los que habitualmente se han considerado contenidos, los de tipo conceptual, como otros que han estado más ausentes de los planes de estudio y que no por ello son menos importantes: contenidos relativos a procedimientos, y a normas, valores y actitudes. En la escuela los alumnos aprenden de hecho estos tres tipos de contenidos. Todo contenido que se aprende es también susceptible de ser enseñado, y se considera tan necesario planificar la intervención con respecto a los contenidos de tipo conceptual como planificarla con relación a los otros tipos de contenido.

En los bloques del Diseño Curricular Base se señalan en tres apartados distintos los tres tipos de contenido. El primero de ellos es el que presenta los *conceptos, hechos y principios*. Los hechos y conceptos han estado siempre presentes en los programas escolares, no tanto los principios. Por principios se entiende enunciados que describen cómo los cambios que se producen en un objeto o situación se relacionan con los cambios que se producen en otro objeto o situación.

El segundo tipo de contenido es el que se refiere a los *procedimientos*. Un procedimiento es un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta. Se puede hablar de procedimientos mas o menos generales en función del número de acciones o pasos implicados en su realización, de la estabilidad en el orden de estos pasos y del tipo de meta al que van dirigidos. En los contenidos de procedimientos se indican contenidos que también caben bajo la denominación de "destrezas’’, técnicas’’ o “estrategias’’, ya que todos estos términos aluden a las características señaladas como definitorias de un procedimiento. Sin embargo, pueden diferenciarse en algunos casos en este apartado contenidos que se refieren a procedimientos o destrezas más generales que exigen para su aprendizaje otras técnicas más específicas, relacionadas con contenidos concretos.

16. La suma de números naturales es a la vez un concepto (concepto de suma) y un procedimiento (sumar). Explica cómo se apoyan entre sí el aprendizaje del procedimiento y del concepto en este caso particular.

17. Formula dos objetivos conceptuales y dos procedimentales referentes a la suma de números naturales.

El último apartado, que aparece en todos los bloques de contenido, es el que se refiere a los *valores*, *normas* y *actitudes*. La pertinencia o no de incluir este tipo de contenido en el Diseño Curricular puede suscitar alguna duda. Hay personas que consideran que puede ser peligroso estipular unos valores y unas normas y actitudes para todos los alumnos. Desde esta propuesta curricular se pretende, en cambio, que los profesores programen y trabajen estos contenidos tanto como los demás ya que, de hecho, los alumnos aprenden valores, normas y actitudes en la escuela. La única diferencia, que se considera en esta propuesta una ventaja, es que ese aprendizaje no se producirá de una manera no planificada, formando parte del currículo oculto, sino que la escuela intervendrá intencionalmente favoreciendo las situaciones de enseñanza que aseguraran el desarrollo de los valores, normas y actitudes que, a partir de las cuatro fuentes del currículo, pero especialmente de la fuente sociológica, se consideren oportunas.

18. ¿Cómo crees que se forman las actitudes negativas hacia las matemáticas? ¿Cómo se ponen de manifiesto?

La distinción entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales es, en primer lugar y sobre todo, de naturaleza pedagógica. Es decir, llama la atención sobre la conveniencia de adoptar un enfoque determinado en la manera de trabajar los contenidos seleccionados. Esta es la razón por la cual, en ocasiones, un mismo contenido aparece repetido en las tres categorías: la repetición en este caso traduce la idea pedagógica de que el contenido en cuestión debe ser abordado convergentemente desde una perspectiva conceptual, procedimental y actitudinal. En otras ocasiones, sin embargo, un determinado contenido aparece únicamente en una u otra de las tres categorías, con ello se sugiere que dicho contenido, por su naturaleza y por la intención educativa propia de la etapa, debe ser abordado con un enfoque prioritariamente conceptual, procedimental o actitudinal.

Estos tres tipos de contenido son igualmente importantes ya que todos ellos colaboran en igual medida a la adquisición de las capacidades señaladas en los objetivos generales del área. El orden de presentación de los apartados referidos a los tres tipos de contenido no supone ningún tipo de prioridad entre ellos. Los diferentes tipos de contenido no deben trabajarse por separado en las actividades de enseñanza y aprendizaje. No tiene sentido programar actividades de enseñanza y aprendizaje ni de evaluación distintas para cada uno de ellos, ya que será el trabajo conjunto lo que permitirá desarrollar las capacidades de los objetivos generales. Sólo en circunstancias excepcionales, cuando así lo aconsejen las características de los alumnos o alguno de los elementos que intervienen en la definición del Proyecto Curricular, puede ser aconsejable enfocar de manera específica el trabajo sobre uno u otro tipo de contenido.

5. UN MODELO DE ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La descripción de los contenidos matemáticos en el Diseño Curricular Base puede ser adecuada para una planificación global del currículo, pero consideramos que es insuficiente para describir la actividad de estudio de las matemáticas.

Por ejemplo, para el bloque temático de "Números y operaciones", los contenidos conceptuales (designados como *conceptos*) que se mencionan son:

1. Números naturales, fraccionarios y decimales:
2. Sistema de Numeración Decimal:
3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división:
4. Reglas de uso de la calculadora

Y como procedimientos se mencionan, entre otros,

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.
2. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.

Este listado de "conceptos y procedimientos" matemáticos es insuficiente para planificar y gestionar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los "números y operaciones" en los distintos niveles de educación primaria. Para poder identificar las dificultades que los alumnos tienen en el estudio de las matemáticas necesitamos reflexionar sobre los tipos de objetos que se ponen en juego en la actividad matemática y las relaciones que se establecen entre los mismos. Ejemplificamos a continuación el modelo de análisis que proponemos para el caso del estudio de la suma y resta en un libro de texto.

5.1. Significados de la suma y la resta en un libro de texto

En lo que sigue analizaremos un fragmento de una lección sobre la "suma y la resta" tomada de un libro de matemáticas de 5º de matemáticas (Figuras 1.1, 1.2 y 1.3). Mostraremos[2] que, dentro de una "etiqueta" como la "suma y la resta", aparecen, además de los conceptos y procedimientos, los problemas, lenguaje y argumentos de una manera articulada y sistemática. Cada uno de estos objetos requiere una atención especial en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A

LA SUMA Y LA RESTA

Sumamos cuando reunimos o juntamos varias cantidades en una sola. Restamos cuando separamos, quitamos una parte de otra o hallamos la diferencia entre dos cantidades.

EQUIPOS	PUNTOS OBTENIDOS		
	DAMAS	PARCHÍS	DIANA
LAS ÁGUILAS	180	45	220
LAS ESTRELLAS	170	45	245
LOS LEONES	170	35	235
LOS COMETAS	190	55	210

Observa y contesta

1. ¿Cuál es el equipo que ha obtenido mayor puntuación en total?
2. ¿Cuántos puntos le faltan al equipo de Los Cometas para igualar al equipo de las Estrellas?
3. ¿Cuántos puntos le faltan al equipo de Las Águilas para tener 500 puntos?
4. En la diana, ¿cuál es la diferencia de puntos obtenidos entre las bolas rojas y las bolas azules?

B

Figura 1.1: La suma y la resta

Observa la parte A de la figura 1.1.

[2] Se trata de un modelo epistemológico de las matemáticas que asume los supuestos básicos del constructivismo social y proporciona elementos para un análisis detallado de la actividad matemática.

19. Describe la actividad que llevan a cabo los niños en la supuesta clase de matemáticas. ¿A qué juegan? ¿Cómo anotan los puntos obtenidos en la competición?. ¿Qué tipo de representaciones matemáticas usan?

Observa la parte B

20. ¿Qué preguntas deben resolver los alumnos que usan el texto? ¿A qué situación se refieren? ¿Qué conceptos matemáticos y procedimientos debe aplicar el alumno para resolverlas?

Aunque las tareas parecen sencillas, el alumno posiblemente necesite una actividad de exploración, debe recordar sus conocimientos previos (seguramente no es la primera vez que han encontrado este tipo de problemas) y ser capaz de aplicar el algoritmo de la suma y la resta. Se espera también que el alumno justifique sus soluciones, usando los conocimientos compartidos con el profesor y el resto de la clase.

El contenido "*la suma y la resta"*, no es simple. En realidad con esta expresión se hace referencia a una serie compleja de prácticas, que mostraremos con detalle a continuación con el análisis de este libro de texto. El alumno ha de ser capaz de realizar dichas prácticas para resolver los problemas aditivos que se le proponen.

Observa la parte C de la figura 1.2

21. ¿Qué otro nuevo problema se propone?

Observa la parte D de la figura 1.2

El autor usa el problema para explicar el significado de la suma y la operación de sumar números naturales.

- Introduce para ello dos formas diferentes de representar los números (sumandos): notación simbólica decimal, resaltando en columnas las unidades, decenas y centenas; y una representación lineal de los tres sumandos y el total, o suma.
- Da dos definiciones distintas de la suma:

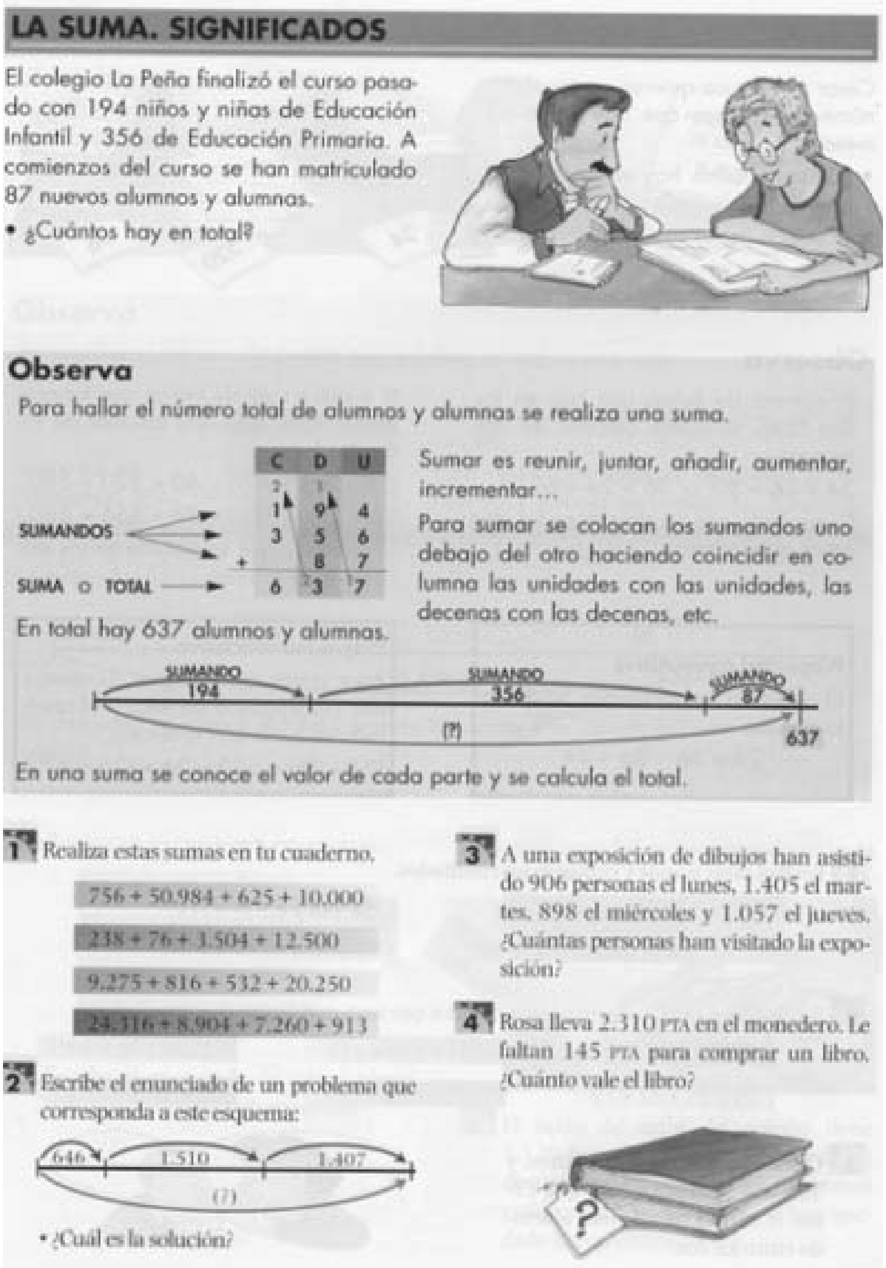
  "sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar, ..."

  "resultado de sumar números"

C

D

E



LA SUMA. SIGNIFICADOS

El colegio La Peña finalizó el curso pasado con 194 niños y niñas de Educación Infantil y 356 de Educación Primaria. A comienzos del curso se han matriculado 87 nuevos alumnos y alumnas.

• ¿Cuántos hay en total?

Observa

Para hallar el número total de alumnos y alumnas se realiza una suma.

	C	D	U
SUMANDOS	1	9	4
	3	5	6
+		8	7
SUMA O TOTAL	6	3	7

Sumar es reunir, juntar, añadir, aumentar, incrementar…

Para sumar se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.

En total hay 637 alumnos y alumnas.

En una suma se conoce el valor de cada parte y se calcula el total.

1 Realiza estas sumas en tu cuaderno.

756 + 50.984 + 625 + 10.000

238 + 76 + 3.504 + 12.500

9.275 + 816 + 532 + 20.250

24.316 + 8.904 + 7.260 + 913

2 Escribe el enunciado de un problema que corresponda a este esquema:

• ¿Cuál es la solución?

3 A una exposición de dibujos han asistido 906 personas el lunes, 1.405 el martes, 898 el miércoles y 1.057 el jueves. ¿Cuántas personas han visitado la exposición?

4 Rosa lleva 2.310 PTA en el monedero. Le faltan 145 PTA para comprar un libro. ¿Cuánto vale el libro?

Figura 1.2: La suma. Significados

- Describe la manera de realizar la suma de los números en el caso general:

  "se colocan los sumandos uno debajo del otro haciendo coincidir en columna las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc."

22. Analiza la explicación que el profesor da de la suma en la parte D e identifica los siguientes tipos de "objetos matemáticos" que usan: - Términos, expresiones y gráficos - Conceptos (definiciones) - Procedimientos (maneras de realizar las operaciones)

Algunos posibles conflictos

En la explicación de la suma (parte D) no se da ninguna justificación o argumentación de por qué la operación de sumar se hace de esta manera.

El niño que usa el libro debe interpretar lo escrito, lo que puede no estar exento de dificultades (conflictos de significados):

- Se dice que sumar es reunir, ..., luego para sumar se debería hacer esa reunión, o sea la unión de los conjuntos disjuntos involucrados. Sin embargo, puede que los alumnos del colegio no se "reúnan físicamente". La operación de sumar no se refiere a la unión de conjuntos, sino a la suma de números que expresan los cardinales de tales conjuntos.
- La descripción de la operación de sumar se hace en lenguaje ordinario y en forma general. El niño debe ponerla en correspondencia con los símbolos numéricos del ejemplo y con la gráfica de la recta numérica. Puede que el niño no vea clara la correspondencia entre los números naturales y un segmento (continuo) de la recta.
- La representación mediante la recta numérica sugiere interpretar la suma como "seguir contando". Esta es una técnica completamente diferente, que no se ha descrito en el libro.

Observa la parte E de la figura 1.2

23. ¿Qué nuevas tareas se incluyen?

¿En qué se diferencian?

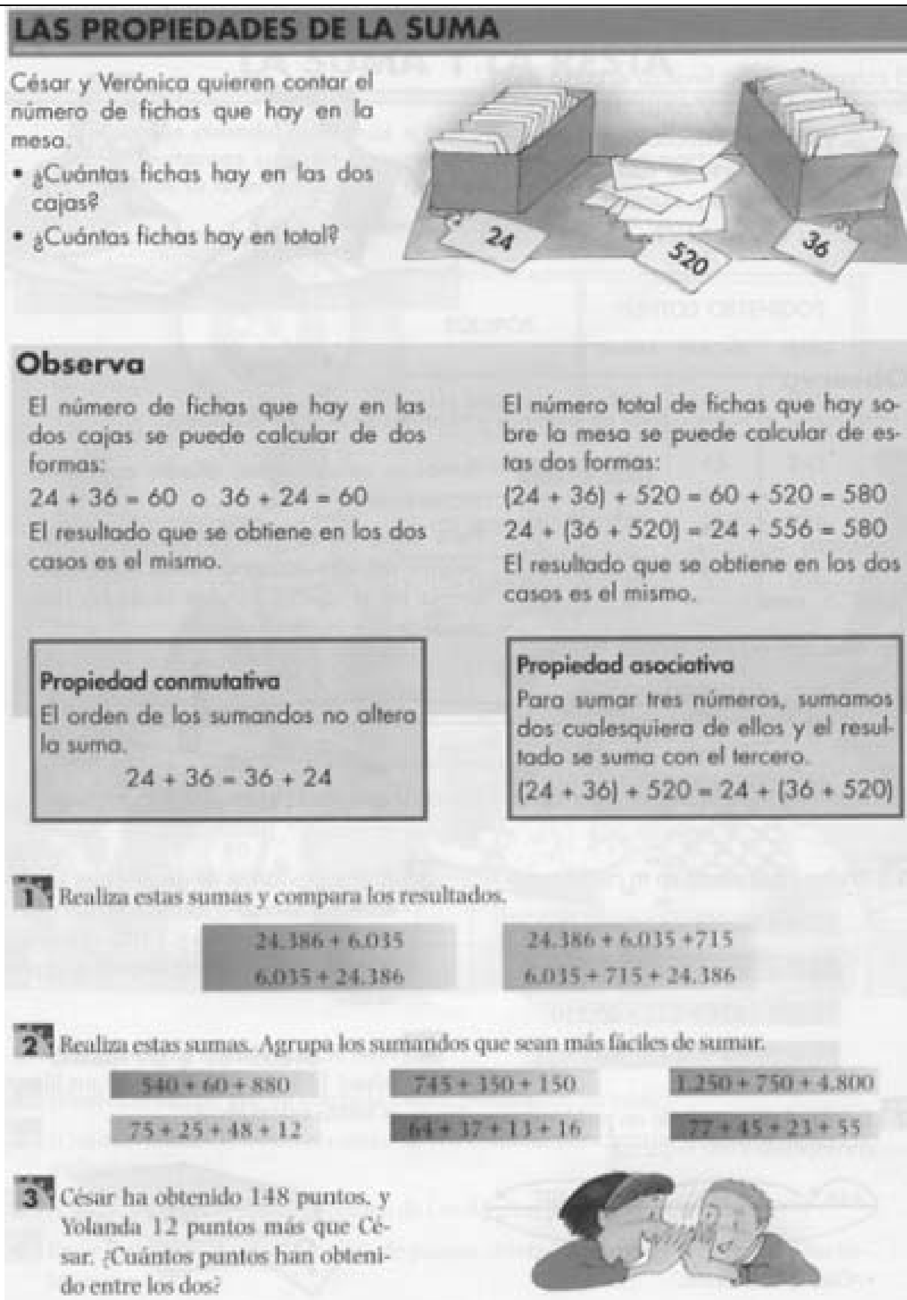
¿Qué finalidad tiene cada una de ellas?

Observa la figura 1.3

24. ¿Qué nuevas propiedades se estudian de la suma?

¿Cómo se justifican?

¿Cuál es la finalidad de los nuevos problemas presentados?

F G H	

LAS PROPIEDADES DE LA SUMA

César y Verónica quieren contar el número de fichas que hay en la mesa.

- ¿Cuántas fichas hay en las dos cajas?
- ¿Cuántas fichas hay en total?

Observa

El número de fichas que hay en las dos cajas se puede calcular de dos formas:

24 + 36 = 60 o 36 + 24 = 60

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

El número total de fichas que hay sobre la mesa se puede calcular de estas dos formas:

(24 + 36) + 520 = 60 + 520 = 580

24 + (36 + 520) = 24 + 556 = 580

El resultado que se obtiene en los dos casos es el mismo.

Propiedad conmutativa
El orden de los sumandos no altera la suma.
24 + 36 = 36 + 24

Propiedad asociativa
Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.
(24 + 36) + 520 = 24 + (36 + 520)

1 Realiza estas sumas y compara los resultados.

24.386 + 6.035
6.035 + 24.386

24.386 + 6.035 + 715
6.035 + 715 + 24.386

2 Realiza estas sumas. Agrupa los sumandos que sean más fáciles de sumar.

540 + 60 + 880
745 + 150 + 150
1.250 + 750 + 4.800
75 + 25 + 48 + 12
64 + 37 + 13 + 16
77 + 45 + 23 + 55

3 César ha obtenido 148 puntos, y Yolanda 12 puntos más que César. ¿Cuántos puntos han obtenido entre los dos?

Figura 1.3: Las propiedades de la suma

5.2. Tipos de objetos que intervienen en la actividad matemática

En las actividades anteriores habrás observado cómo, al describir con detalle la actividad matemática, encontramos los siguientes seis tipos de objetos:

- Problemas y situaciones (cuestiones, ejercicios, etc.)
- Lenguaje (términos, expresiones, gráficos, etc.)
- Acciones (, técnicas, algoritmos, etc.)
- Conceptos (definiciones o reglas de uso)
- Propiedades de los conceptos y acciones

- Argumentaciones (inductivas, deductivas, etc.)

Estos objetos están relacionados unos con otros. El lenguaje es imprescindible para describir los problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones. Los conceptos y propiedades deben ser recordados al realizar las tareas, las argumentaciones sirven para justificar las propiedades.

5.3. Procesos matemáticos

En la actividad matemática aparecen también una serie de procesos que se articulan en su estudio, cuando los estudiantes interaccionan con las situaciones - problemas, bajo la dirección y apoyo del profesor. Los Principios y Estándares 2000 del NCTM resaltan la importancia de los procesos matemáticos, en la forma que resumimos a continuación.

1. Resolución de problemas (que implica exploración de posibles soluciones, modelización de la realidad, desarrollo de estrategias y aplicación de técnicas).
2. Representación (uso de recursos verbales, simbólicos y gráficos, traducción y conversión entre los mismos).
3. Comunicación (diálogo y discusión con los compañeros y el profesor).
4. Justificación (con distintos tipos de argumentaciones inductivas, deductivas, etc.).
5. Conexión (establecimiento de relaciones entre distintos objetos matemáticos).

Nosotros, además añadimos el siguiente proceso:

6. Institucionalización (fijación de reglas y convenios en el grupo de alumnos, de acuerdo con el profesor)

Estos *procesos* se deben articular a lo largo de la enseñanza de los contenidos matemáticos organizando tipos de situaciones didácticas que los tengan en cuenta. A continuación los describimos brevemente.

1. Resolución de problemas

La importancia que se da a resolución de problemas en los currículos actuales es el resultado de un punto de vista sobre las matemáticas que considera que su esencia es precisamente la resolución de problemas. Muchos autores han ayudado a desarrollar este punto de vista como, por ejemplo, Lakatos[3]. Entre estos autores destaca Polya. Para Polya[4], la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución obtenida. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

Los trabajos de Polya, se pueden considerar como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal. Ahora bien ¿Por qué es tan difícil, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas? Los trabajos de Schoenfeld[5] tienen por objetivo explicar la conducta real de los resolutores reales de problemas.

[3] En su libro "Pruebas y refutaciones" Lakatos presenta un choque de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática, presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura (1978, Alianza editorial)

[4] Polya, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problema?*. México: Trillas

[5] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York

Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas: 1) Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor, 2) Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles, 3) Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles y 4) Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Los estudiantes deberán tener frecuentes oportunidades de plantear, explorar y resolver problemas que requieran un esfuerzo significativo.

Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen resolutor de problemas.

La resolución de problemas es una parte integral de cualquier aprendizaje matemático, por lo que consideramos que no debería ser considerado como una parte aislada del currículo matemático. En consecuencia, la resolución de problemas debe estar articulada dentro del proceso de estudio de los distintos bloques de contenido matemático. Los contextos de los problemas pueden referirse tanto a las experiencias familiares de los estudiantes así como aplicaciones a otras áreas. Desde este punto de vista, los problemas aparecen primero para la construcción de los objetos matemáticos y después para su aplicación a diferentes contextos.

25. Analiza cómo se usa la resolución de problemas en el texto anteriormente analizado.

26. Indica algunas situaciones de la vida ordinaria en que sea precisa la resolución de problemas.

2. Representación con diversos lenguajes

La manera de expresar nuestras ideas influye en cómo las personas pueden comprender y usar dichas ideas. Por ejemplo, es diferente la comprensión que tenemos de los números naturales cuando los representamos mediante dígitos o mediante la recta numérica. Algunos autores como Wittgenstein piensan incluso, que sin el lenguaje no hay tales ideas, ya que éstas no son otra cosa que reglas gramaticales de los lenguajes que usamos para describir nuestro mundo.

Ejemplo

Sin la palabra "triángulo" (u otra que tenga los mismos usos) no existiría la idea de triángulo. Esta idea no es más que una regla para describir un cierto tipo de objetos (con tres vértices, con tres lados, suma de ángulos igual a 180 grados, etc.).

El lenguaje matemático tiene además una doble función:

- *representacional*: nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir;
- *instrumental*: como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, o gráficas. En consecuencia, el estudio de los diversos sistemas de representación para

un mismo contenido matemático es necesario para la comprensión global del mismo.

El lenguaje es esencial para:

- comunicar las interpretaciones y soluciones de los problemas a los compañeros o el profesor;
- reconocer las conexiones entre conceptos relacionados;
- aplicar las matemáticas a problemas de la vida real mediante la modelización.
- para utilizar los nuevos recursos tecnológicos que se pueden usar en el trabajo matemático.

> 27. Haz una lista de las posibles representaciones a) de un triángulo, b) de un número, y c) de un conjunto de datos estadísticos. ¿Qué características se visualizan mejor en cada una de ellas?

3. Comunicación

La comunicación de nuestras ideas a otros es una parte esencial de las matemáticas y, por tanto, de su estudio . Por medio de la formulación, sea esta oral o escrita , y la comunicación, las ideas pasan a ser objetos de reflexión, discusión, revisión y perfeccionamiento. El proceso de comunicación ayuda a construir significado y permanencia para las ideas y permite hacerlas públicas.

Cuando pedimos a los estudiantes que piensen y razonen sobre las matemáticas y que comuniquen los resultados de su pensamiento a otras personas, de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y convincentes. Cuando los estudiantes escuchan las explicaciones de otros compañeros tienen oportunidades de desarrollar sus propias interpretaciones. Los diálogos mediante los que las ideas matemáticas se exploran desde distintas perspectivas ayudan a los participantes a ajustar su pensamiento y hacer conexiones.

Cuando los alumnos participan en discusiones en las que tienen que justificar sus soluciones -especialmente cuando hay desacuerdos - mejoran su comprensión matemática a medida que tienen que convencer a sus compañeros de puntos de vista diferentes. Esa actividad también ayuda a los estudiantes a desarrollar un lenguaje para expresar ideas matemáticas y les hace conscientes de la necesidad de usar un lenguaje preciso. Los alumnos que tienen oportunidades, estímulo y apoyo para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas reciben un doble beneficio: mejoran su aprendizaje matemático al tiempo que aprenden a comunicarse de manera matemática.

4. Justificación

El razonamiento matemático y la demostración son componentes esenciales del conocimiento matemático entendido éste de la manera integral que proponemos. Mediante la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas matemáticas, la justificación de resultados, sobre distintos contenidos matemáticos y diferentes niveles de complejidad los alumnos apreciarán que las matemáticas tienen sentido. Partiendo de las destrezas de razonamiento con las que los niños entran en la escuela, los maestros pueden ayudarles a que aprendan lo que supone el razonamiento matemático.

El razonamiento y la demostración matemática no se pueden enseñar impartiendo un tema sobre lógica, o unas demostraciones aisladas sobre temas como la geometría. Este componente del conocimiento matemático deberá estar presente en la experiencia matemática de los estudiantes desde los niveles de educación infantil. Razonar de manera matemática es un hábito, y como todos los hábitos se debe desarrollar mediante un uso consistente en muchos contextos.

5. Conexiones matemáticas

Cuando los estudiantes pueden conectar las ideas matemáticas entre sí, con las aplicaciones a otras áreas, y en contextos de su propio interés, la comprensión matemática es más profunda y duradera. Podemos postular que sin conexión no hay comprensión, o ésta comprensión es débil y deficiente. Mediante una instrucción que enfatiza las interrelaciones entre las ideas matemáticas, los estudiantes no sólo aprenden matemáticas, sino que también aprecian la utilidad de las matemáticas.

Las matemáticas no se deben ver como una colección de partes separadas, aunque con frecuencia se divide en temas que se presentan desconectados. Las matemáticas son un campo integrado de estudio, por lo que los matemáticos profesionales prefieren referirse a su disciplina en singular: la Matemática. Concebir las matemáticas como un todo resalta la necesidad de estudiar y pensar sobre las conexiones internas de la disciplina, tanto en un nivel particular del currículo como entre distintos niveles. Para enfatizar las conexiones, los profesores deben conocer las necesidades de sus estudiantes, así como las matemáticas que estudiaron en los niveles anteriores, y las que estudiarán en los siguientes.

28. Estudia las conexiones del concepto de polígono con otras ideas matemáticas. Elabora un mapa conceptual que ponga de relieve estas relaciones.

6. Institucionalización

Las matemáticas constituyen un sistema conceptual lógicamente organizado. Una vez que un objeto matemático ha sido aceptado como parte de dicho sistema puede ser considerado como una realidad cultural, fijada mediante el lenguaje, y un componente de la estructura lógica global. En el proceso de estudio matemático habrá pues una fase en la que se fija una "manera de decir", públicamente compartida, que el profesor deberá poner a disposición de los alumnos en un momento determinado.

Los profesores en formación de los distintos niveles educativos deberán conocer la importancia de los seis procesos de índole matemática que hemos descrito, y tenerlos en cuenta en su trabajo como directores y ayudantes de los procesos de estudio matemático de los niños.

29. A partir de la observación de una sesión de clase de matemáticas identifica los diferentes procesos que se ponen en juego entre los descritos anteriormente.

5.4. Conocimientos personales e institucionales

En una clase, los conocimientos de cada alumno en un momento dado son muy variados. Hablamos de conocimiento *personal* de cada alumno para diferenciarlo del conocimiento fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo (*conocimiento institucional).*

Ejemplo,

> El Diseño Curricular Base (MEC) fija unos contenidos para la suma y la resta que se concretan en la programación que hace cada profesor en su clase (conocimiento institucional). Un niño puede finalizar un nivel escolar sin haber alcanzado plenamente todos los objetivos fijados.

Podemos describir metafóricamente el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales en una clase. Es importante diferenciar las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

6. TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Cuando queremos enseñar un cierto contenido matemático, tal como los números racionales, hay que adaptarlo a la edad y conocimientos de los alumnos, con lo cual hay que simplificarlo, buscar ejemplos asequibles a los alumnos, restringir algunas propiedades, usar un lenguaje y símbolos más sencillos que los habitualmente usados por el matemático profesional.

Ejemplo

> En Matemáticas, se define la suma de dos números naturales *a* y *b* como “el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos que tienen como cardinales *a* y *b* respectivamente.
>
> Esta definición es demasiado complicada para el alumno de primaria. Se suele sustituir por ideas tales como “reunir”, “juntar”, “añadir”. Se proporciona al niño regletas, colecciones de objetos y otros materiales para que pueda experimentar con los mismos. Es claro que el significado es muy diferente en los dos casos.

La expresión "transposición didáctica"[6] hace referencia al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. Como consecuencia se producen diferencias en el significado de los objetos matemáticos entre la "institución matemática" y las instituciones escolares. Por ejemplo, los usos y propiedades de las nociones matemáticas tratadas en la enseñanza son necesariamente restringidos. El problema didáctico se presenta cuando, en forma innecesaria, se muestra un significado sesgado o incorrecto.

[6] Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

C: Seminario didáctico

1. ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

(1) Cumplimentar el cuestionario adjunto de "Actitudes hacia las matemáticas". Presentar y discutir los resultados en la clase.

Cuestionario de actitudes[7]*:*

Señalar el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre las matemáticas, según el siguiente convenio:

> 1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.

   1 2 3 4 5

2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.

   1 2 3 4 5

3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto

   1 2 3 4 5

4. Utilizar las matemáticas es una diversión para mí.

   1 2 3 4 5

5. Las matemáticas son demasiado teóricas para que puedan servirme de algo.

   1 2 3 4 5

6. Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de las matemáticas..

   1 2 3 4 5

7. Las matemáticas son una de las asignaturas que más temo.

   1 2 3 4 5

8. Tengo confianza en mí cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

   1 2 3 4 5

9. Me divierte el hablar con otros de matemáticas.

   1 2 3 4 5

[7] Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.

10. Las matemáticas pueden ser útiles para el que decida realizar una carrera de "ciencias", pero no para el resto de los estudiantes.

    1 2 3 4 5

11. Tener buenos conocimientos de matemáticas incrementará mis posibilidades de trabajo.

    1 2 3 4 5

12. Cuando me enfrento a un problema de matemáticas me siendo incapaz de pensar con claridad.

    1 2 3 4 5

13. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de matemáticas.

    1 2 3 4 5

14. Las matemáticas son agradables y estimulantes para mí.

    1 2 3 4 5

15. Espero tener que utilizar poco las matemáticas en mi vida profesional.

    1 2 3 4 5

16. Considero que existen otras asignaturas más importantes que las matemáticas para mi futura profesión.

    1 2 3 4 5

17. Trabaja con las matemáticas hace que me sienta muy nervioso/a.

    1 2 3 4 5

18. No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de matemáticas.

    1 2 3 4 5

19. Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar las matemáticas.

    1 2 3 4 5

20. Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de matemáticas.

    1 2 3 4 5

21. Para mi futuro las matemáticas son una de las asignaturas más importantes que tengo que estudiar.

    1 2 3 4 5

22. Las matemáticas hacen que me sienta incómodo/a y nervioso/a.

    1 2 3 4 5

23. Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien las matemáticas.

    1 2 3 4 5

24. Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de matemáticas de los que son obligatorios.

    1 2 3 4 5

25. La materia que se imparte en las clases de matemáticas es muy poco interesante.

1 2 3 4 5

(2) Comenta el siguiente texto que hace referencia a un chico de 12 años:

"Una mujer imploraba desesperadamente al otro lado del teléfono:

<<Tememos que nuestro hijo de doce años esté incapacitado para el aprendizaje, que tenga algo en el cerebro. No puede aprender matemáticas. ¿Querría Vd. examinarlo para ver si se puede hacer algo?>>.

Después de que Mark entrara con mucha vergüenza en mi despacho, sus primeras palabras revelaron su temor:

<<¡Así que ahora va Vd. a descubrir lo tonto que soy!>>

Le expliqué que el propósito de la reunión era descubrir qué sabía y qué no sabía de las matemáticas para que sus padres y sus maestros pudieran ayudarle mejor(...) (Baroody 1988, pp. 75-76).

(3) ¿Qué tipo de enseñanza de las matemáticas pueden generar las siguientes creencias sobre las matemáticas:

"- La incapacidad para aprender datos o procedimientos con rapidez es señal de inferioridad en cuanto a inteligencia y carácter.

- La incapacidad para responder con rapidez o emplear un procedimiento con eficacia indica <<lentitud>>.

- La incapacidad para responder correctamente indica una deficiencia mental.

- Una incapacidad total para responder es señal de una estupidez absoluta.

- Todos los problemas deben tener una respuesta correcta.

- Sólo hay una manera (correcta) de resolver un problema.

- Las respuestas inexactas (por ejemplo las estimaciones) y los procedimientos inexactos (por ejemplo, resolver problemas por ensayo y error) son inadecuados.

- Comprender las matemáticas es algo que sólo está al alcance de los genios.

- Las matemáticas no tienen por qué tener sentido." (Barody 1988, pp. 77-78).

2. REFLEXIÓN Y REDACCIÓN

(4) Explicar y dar ilustraciones de las siguientes afirmaciones:

Las matemáticas son:

- El estudio de patrones y relaciones
- Una manera de pensar
- Un arte
- Un lenguaje

(5) Compara la siguiente afirmación sobre las matemáticas con las de la actividad anterior:

Las matemáticas son la ciencia que estudia el número y el espacio

¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

(6) Las matemáticas muchas veces se presentan como una ciencia objetiva e ideológicamente neutral.

Primero resuelve y después comenta qué opinión te merecen estos dos problemas correspondientes a textos de aritmética de inicios del siglo XX.

"La viuda de un militar que pereció en la última guerra de Cuba disfruta de un sueldo de 1.375 ptas al año; y dando lecciones de música y francés a algunas señoritas, gana 10 duros mensuales. ¿Qué cantidad podrá depositar cada mes en la Caja de Ahorros, necesitando para su manutención y demás gastos los 7/9 de lo que posee y destinando el 4% del resto para limosnas?"(1906)

"Un industrial explotador, cuyo capital, como el de todos los capitalistas, se acumula merced a las privaciones de la clase obrera, ha determinado, contando de antemano con la inconsciencia de sus obreros, rebajar 2 reales a cada una de las 252 piezas que semanalmente le elaboran sus esclavos. Dígase cuánto representa esta rebaja al cabo de un año, cuántos obreros trabajan en su fábrica, sabiendo que cada uno fabrica 6 piezas semanalmente y cuánto roba a cada obrero?" (1905).

(7) Para algunos sociólogos, la idea de que las matemáticas puedan variar igual que varía la organización social no es admisible.

Uno de los primeros sociólogos que se opuso a este punto de vista fue Splenger en el primer capítulo "El sentido de los números" de su obra "La decadencia de Occidente" publicada en 1918. En este capítulo Spengler expone, entre otras, las siguientes ideas:

- *"Mas no debe confundirse la matemática considerada como la facultad de pensar prácticamente los números, con el concepto mucho más estrecho de la matemática como <<teoría>> de los números desarrollada en forma hablada o escrita. Ni la matemática escrita ni la filosofía explicada en libros teóricos representan todo el caudal de intuiciones y pensamientos matemáticos y filosóficos que atesora una cultura.*"

- *"En vano aplicaremos nosotros, los occidentales, nuestro propio concepto científico del número, violentamente, al objeto de que se ocupaban los matemáticos de Atenas y Bagdad; es lo cierto que el tema, el propósito y el método de la ciencia que en estas ciudades llevaba el mismo nombre, eran muy diferentes de los de nuestra matemática. <<No hay una matemática; hay muchas matemáticas>>."*

Comenta las opiniones de estos sociólogos.

3. ACTIVIDADES DE CAMPO

(8) Observar una sesión de clase de matemáticas en un nivel de primaria.

Hacer una lista de momentos en los se muestra evidencia de usar uno o varios de los procesos matemáticos considerados en la sección 5.3. Decir lo que hacen o dicen los niños y en qué tipo de actividad estaban implicados. ¿Qué papel juega el profesor?

(9) Plantear a los estudiantes de primaria las siguientes cuestiones sobre la resolución de problemas matemáticos:

a) *¿Qué es un problema matemático?*

b) *¿Qué haces para resolver un problema?*

Clasificar y discutir las distintas respuestas.

(10) Analizar y discutir la evolución de las respuestas dadas por niños de infantil y primaria a las cuestiones que se indican[8]:

a) *Maestra*: "Yo tengo 3 caramelos (la maestra enseña los 3 caramelos que tiene) y tú tienes 2 (el niño tiene 2 caramelos en su mano) ¿Quién tiene más caramelos?"

"La que tiene más caramelos es la señora de la portería que tiene una caja llena"

"No, yo no tengo ningún caramelo, tú me lo has dado, pero no son míos ... "

b) *Maestra*: ¿Qué es un problema?

"Un problema es tener un hermanito" (P3, Preescolar 3 años)

"Un problema es que mi hermano me pegue"(P3)

"Un problema es alguna cosa que nos preocupa"(P3)

"Un problema es no hacer las cosas bien"(P4)

"Un problema es perder alguna cosa" (P4)

"Que Maria se haga pipi encima"(P4)

"Un problema es que pasa alguna cosa"(P5)

"Que te dicen una pregunta que no sabes" (1º)

"Que te dicen una cosa y has de decir la respuesta" (1º)

"Es una pregunta que tienes que pensar con la cabeza" (1º)

"Es una pregunta que tienes que adivinar" (1º)

"Son preguntas que te hacen y al principio no las sabes, pero luego haces un dibujo en el papel o lo dibujas en la cabeza o te lo imaginas y luego ya lo ves más claro" (1º)

[8] Coll, C. (2001). La resolució de problemes en les primeres edats. *Biaix*, 18: 9-12.

"Un problema es una pregunta que no sabes la respuesta y tienes que pensar y pensar para dar la respuesta (2º)

c) *Maestra*: ¿Qué haces para resolver un problema?

"Estoy callado, luego no veo nada, bueno lo veo todo oscuro...y luego ya me sale la respuesta" (P4)

"Me fijo mucho y después me sale" (P4)

"Me meto lo que me dicen en la cabeza, después me lo imagino, veo lo que está pasando y luego ya lo sé" (P5)

"Pienso, muevo la cabeza y.......ya me sale" (1º)

"Lo pienso hasta que lo encuentre" (1º)

"Lo pienso un rato, depende de si el problema es difícil o no. Algunas veces sólo de escucharlo ya sé como se hace" (1º)

"Lo pienso con el cerebro" (1º)

d) Al preguntarle a un alumno de segundo ciclo si el problema,

"En un árbol hay 2 gorriones y uno se va volando. ¿Cuántos gorriones quedan?, era realmente un problema, el alumno contestó que "esto no es un problema, porque yo ya sé la solución".

e) La siguiente respuesta corresponde a un alumno de segundo ciclo inicial cuando se le pidió que explicara a un niño de otra clase los problemas que resolvían en su clase:

"Hay muchos problemas, algunos problemas los has de escuchar muy bien para saber que te preguntan, en otros los has de mirar, porque en la fotografía esta la respuesta, en otros los has de pensar sólo con la cabeza, en otros los has de tocar para saber la respuesta.....en otros necesitas alguna cosa que te ayude a hacerlos .... por ejemplo si me preguntan cuánto peso y no lo sé he de ir a pesarme y después ya sabré el problema....En otros me los imagino con la cabeza y luego ya los sé..."

¿Qué conclusión te sugieren estas respuestas sobre la enseñanza de la resolución de problemas en las primeras edades?

4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (TALLER MATEMÁTICO)

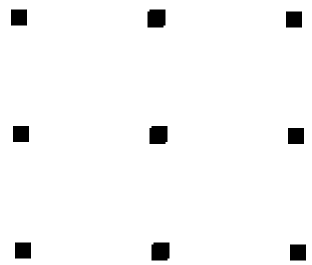
(11) Resuelve los siguientes problemas:

1. Encuentra el mayor número posible de cuadrados de cualquier tamaño que se puedan formar en un tablero de 4x4.[9]

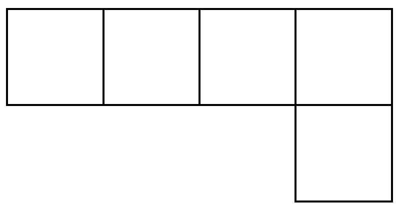
[9] Este problema se comenta en: Bolt, B. (1998). Què és la geometria?. *Biaix*, 12: 2-14.

2. Unir 6 cerillas de modo que formen cuatro triángulos equiláteros contiguos cuyos lados sean iguales a la longitud de una cerilla.[10]

3. Utilizando sólo cuatro líneas rectas, unir los nueve puntos sin levantar el lápiz del papel



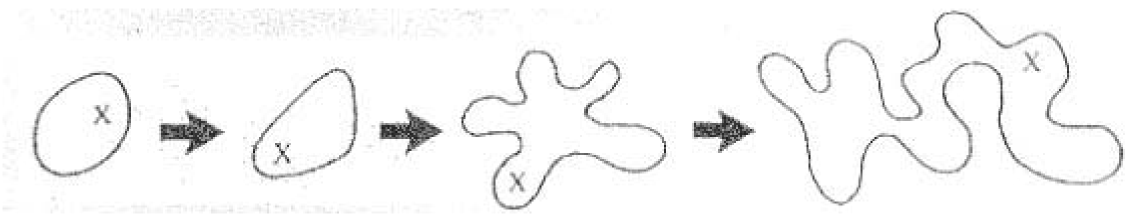
4. Desplaza tres segmentos a nuevas posiciones para que los seis cuadrados de la figura se conviertan en 4 de área igual a los de la figura



5. Demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º

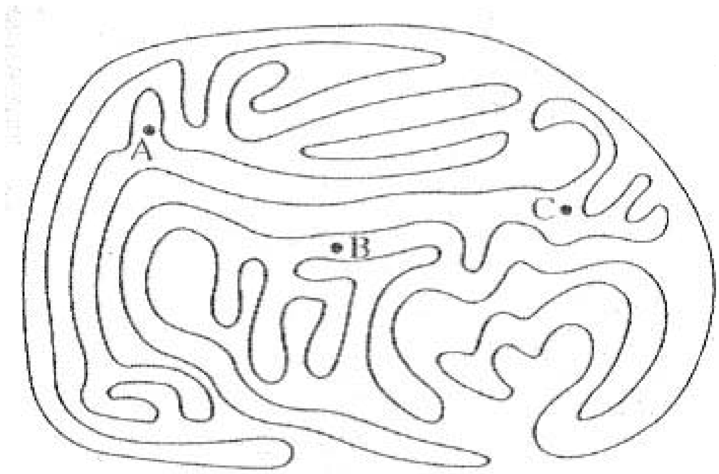
6. En las figuras siguientes resulta fácil saber si el punto X es interior o exterior a la curva y también saber si la curva (simple) es cerrada o abierta.

   a) ¿Los puntos de la figura siguiente están dentro o fuera?



   c) Un francés llamado Jordan descubrió una manera muy simple para saber si un punto es interior o exterior a una curva cerrada simple**:** dibujó una línea recta desde el punto hasta el exterior de la curva y contó si esta recta cortaba a la curva un número par o impar de veces. ¿Puedes decir de qué regla se trata?

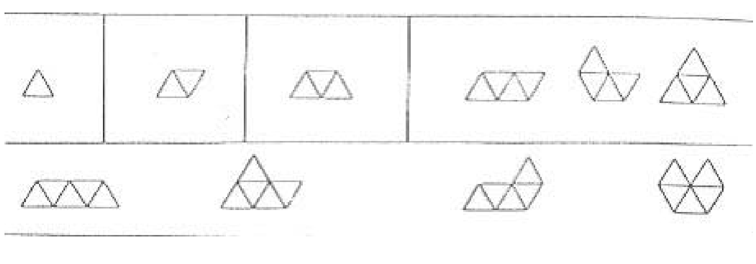
[10] Los problemas 2,3 y 4 se comentan con detalle en Orton (1990)



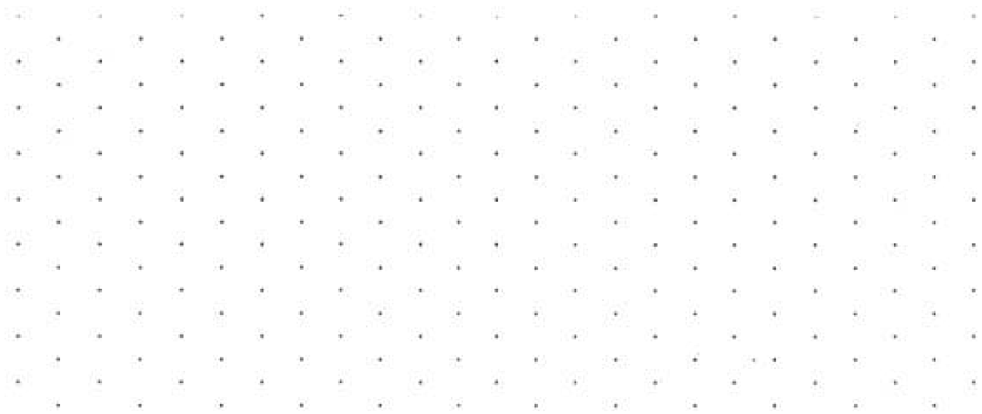
7. Tienes que completar este cuadrado mágico, de tal manera que ha de tener todos los números del 1 al 25 y ha de cumplir la propiedad de que todas las columnas y filas sumen 65.

		25	18	11
	21	19	12	10
22	20	13		
16	14			23
15			24	17

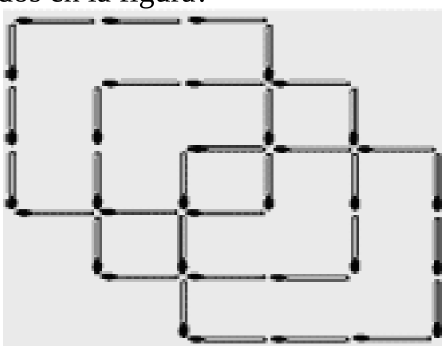
8. Las siguientes figuras son polidiamantes. Estas figuras son triángulos de un determinado tipo conectados por un lado. En la figura puedes ver los polidiamantes formados por 1 triángulo, por 2 triángulos, por 4 triángulos y por 5 triángulos.
   a) ¿Cuál es la clase de triángulos que forman los polidiamantes? ¿Qué propiedad cumplen?
   b) ¿Cuáles de los polidiamantes formados por 4 triángulos son desarrollos planos del tetraedro?



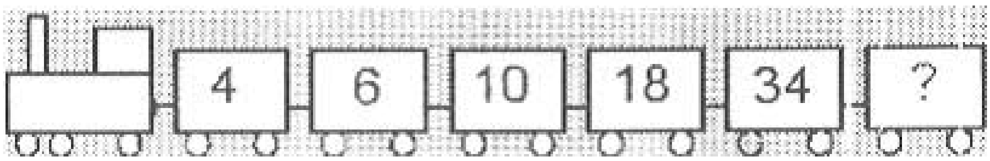
c) De polidiamantes formados por 6 triángulos, o hexadiamantes, hay 12. Dibújalos.



9. ¿Cuál es el número mínimo de cerillas que hemos de añadir para obtener exactamente 11 cuadrados en la figura?



10. ¿Cuál es el número del último vagón del tren?



11. Diez encinas producen 17 kg de oxígeno en 1 hora. ¿Cuántas encinas necesitamos para proporcionar a 34 estudiantes el oxígeno que necesitan durante 1 hora si cada uno necesita 0,7 kg por hora?
12. ¿Cuál es el número de diagonales de un polígono?
13. Dado un cuadrado de 20 cm de lado unimos los puntos medios de los lados opuestos para obtener 4 cuadrados. Si en cada cuadrado unimos los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene otro cuadrado. ¿Cuál es su área?
14. a) A partir de los polígonos de la figura siguiente completa las filas de la tabla tomando como unidad el área del cuadrado determinado por cuatro puntos de la trama

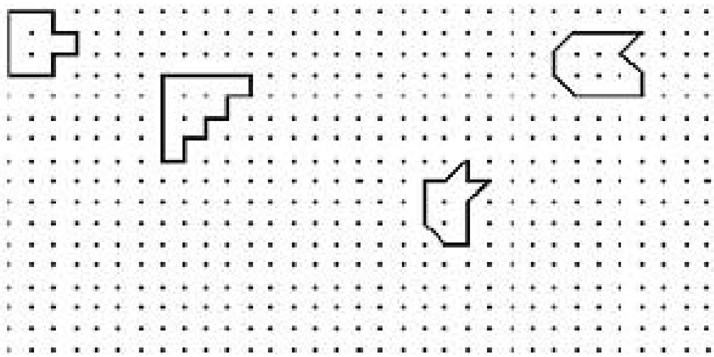


Figura	Área	Puntos interiores (i)	La mitad de los puntos de la frontera (b/2)
1	7	2	6
2			
3			
4			
5			
6			
....			

b) ¿Puedes hallar alguna relación entre el área, los puntos interiores y los puntos de la frontera (si lo necesitas puedes dibujar más polígonos)?

15. Dos amigos, Juan y Pedro, se encuentran después de mucho tiempo. Juan le pregunta a Pedro cómo le va la vida. Pedro le responde que tiene tres hijas y Juan le pregunta qué edades tienen. Pedro le dice que el producto de las tres edades es 36 y que su suma es el número de su casa (la casa de Juan). Juan piensa un rato y le dice que no hay suficiente información para saber las edades de sus hijas, a lo que Pedro responde que la mayor toca el piano. Juan descubre inmediatamente les edades de las hijas de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las tres hijas de Pedro?

(12) A continuación tienes algunas de las estrategias que se utilizan para resolver problemas:

a. Ensayo y error,

b. Construir un modelo,

c. Análisis-síntesis,

d. Resolver un problema más simple,

e. Hallar alguna regularidad,

f. Utilizar una tabla o un esquema.

Explica cuál de ellas has utilizado para resolver cada uno de los problemas anteriores

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C.; Burgués, C., Fortuny, J., Jiménez, J. y Torra, M. (1995). *Enseñar matemáticas.* Barcelona: Graó.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor/MEC.

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática.* Madrid: MEC-Labor.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica, *Uno*, 23: 9-28.

MEC (1989). *Diseño curricular base*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata/MEC.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Capítulo 2

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

A1. Creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Consigna:
A continuación presentamos dos cuestionarios con algunos enunciados que reflejan diferentes modos de pensar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1) Completa cada cuestionario, leyendo con atención los enunciados e indicando el grado de acuerdo con cada uno de ellos, mediante un valor numérico, siguiendo el convenio presentado.
2) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Cuestionario A:
Indica tu grado de acuerdo con cada enunciado, según el siguiente convenio:
1: Totalmente de acuerdo con el enunciado de la izquierda; 2: Si estás de acuerdo con el enunciado de la izquierda; 3: Si estás indeciso; 4: Si estás más de acuerdo con el enunciado de la derecha; 5: Si estás completamente de acuerdo con el enunciado de la derecha.

El fin principal de la educación matemática elemental es asegurar el dominio de hechos básicos, reglas, fórmulas y procedimientos	1 2 3 4 5	El fin principal de la educación matemática es promover la comprensión y el pensamiento
El crecimiento del conocimiento implica acumulación de información para estar más informado	1 2 3 4 5	El crecimiento del conocimiento implica ganar nuevas comprensiones y reorganizar el propio pensamiento
El aprendizaje es esencialmente un proceso receptivo y pasivo de memorización de información	1 2 3 4 5	El aprendizaje es esencialmente un proceso activo de construir comprensiones y estrategias
La memorización precisa de hechos y procedimientos y requiere que los niños estén atareados: que escuchen con atención y practiquen con diligencia lo que se les ha enseñado	1 2 3 4 5	La construcción activa del conocimiento requiere hacer matemáticas (esto es, descubrir patrones, hacer y comprobar conjeturas, y resolver problemas)
La instrucción directa y la práctica son el modo más efectivo de transmitir información a los niños	1 2 3 4 5	La implicación activa de los alumnos en el aprendizaje por descubrimiento y la solución de problemas es el modo más efectivo de estimular la comprensión y el pensamiento
Enseñar es explicar - un profesor es principalmente un transmisor de información.	1 2 3 4 5	Enseñar es guiar - un profesor sirve principalmente para facilitar el descubrimiento y el pensamiento.

Puesto que los niños no tienen un interés natural en aprender matemáticas, es esencial para los educadores encontrar modos de estimular el aprendizaje.	1 2 3 4 5	Puesto que los niños tienen un interés natural en explorar y comprender las cosas, las matemáticas pueden ser interesantes por sí mismas.

Cuestionario B:

Señala el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, según el siguiente convenio:
1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Los procedimientos no estándares se deberían descartar porque pueden interferir con el aprendizaje del procedimiento correcto.
   1 2 3 4 5
2. La instrucción matemática debería comenzar con las destrezas básicas y progresar hacia el estímulo del pensamiento de orden superior.
   1 2 3 4 5
3. Cuando se introduce un tema matemático, un profesor debería seguir el siguiente principio: "Primero lo simple y directo" y sólo más tarde introducir problemas más complejos.
   1 2 3 4 5
4. Los niños pequeños son matemáticamente incapaces. Esto es, son incapaces de resolver incluso problemas matemáticos elementales porque les falta el prerrequisito de experiencia y conocimiento.
   1 2 3 4 5
5. Para comprender las matemáticas elementales, los niños deben ser conducidos mediante una secuencia sistemática de lecciones bien organizadas.
   1 2 3 4 5
6. Un profesor debe servir como el juez de lo que es correcto o no.
   1 2 3 4 5
7. Un profesor debería siempre proporcionar feedback (esto es, alabar las respuestas correctas de los estudiantes y corregir inmediatamente sus respuestas incorrectas).
   1 2 3 4 5
8. Un profesor debería actuar rápidamente para eliminar desacuerdos porque son perturbadores y pueden causar confusión innecesaria.
   1 2 3 4 5
9. Para estimular la independencia, los estudiantes deberían trabajar solos para realizar las tareas.
   1 2 3 4 5

A2. Lectura, reflexión y discusión

Consigna:
A continuación se presenta un texto que describe una clase de matemáticas imaginaria

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente atractivos en la descripción.

2) ¿Qué puntos corresponden a una clase estándar de matemáticas? ¿Cuáles podrían alcanzarse si el profesor se lo propone? ¿Cuáles te gustaría personalmente conseguir en tu clase de matemáticas?

3) ¿Cuáles son las tareas, responsabilidades y funciones que se describen del profesor? ¿Y de los alumnos?

> *"Imagine una clase, una escuela, o un distrito escolar donde todos los estudiantes tienen acceso a una instrucción matemática atractiva y de alta calidad. Se proponen unas expectativas ambiciosas para todos, con adaptación para aquellos que lo necesitan. Los profesores están bien formados, tienen recursos adecuados que apoyan su trabajo y están estimulados en su desarrollo profesional. El currículo es matemáticamente rico y ofrece oportunidades a los estudiantes de aprender conceptos y procedimientos matemáticos con comprensión. La tecnología es un componente esencial del entorno. Los estudiantes, de manera confiada, se comprometen con tareas matemáticas complejas elegidas cuidadosamente por los profesores. Se apoyan en conocimientos de una amplia variedad de contenidos matemáticos, a veces enfocando el mismo problema desde diferentes perspectivas matemáticas o representando las matemáticas de maneras diferentes hasta que encuentran métodos que les permiten progresar. Los profesores ayudan a los estudiantes a hacer, refinar y explorar conjeturas sobre la base de la evidencia y usan una variedad de razonamientos y técnicas de prueba para confirmar o rechazar las conjeturas. Los estudiantes son resolutores flexibles de problemas y tienen recursos variados. Solos o en grupos y con acceso a la tecnología, los estudiantes trabajan de manera productiva y reflexiva, con la guía experimentada de sus profesores. Los estudiantes son capaces de comunicar sus ideas y resultados oralmente o por escrito de manera efectiva. Valoran las matemáticas y se comprometen activamente en su aprendizaje."*

(NCTM 2000, Una Visión de las Matemáticas Escolares).

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

Seguramente pensarás que la visión de la clase de matemáticas que nos propone el NCTM en la lectura introductoria, aunque ciertamente ambiciosa, es muy valiosa. Hemos tomado esta lectura como punto de partida para reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo 1 hemos presentado nuestra visión de las matemáticas como *quehacer humano* (las matemáticas son una actividad humana), *lenguaje simbólico* (el lenguaje de la ciencia) *y sistema conceptual* (red interconectada de conceptos, propiedades y relaciones, construida progresivamente mediante negociación social). No hay duda que la forma de concebir las matemáticas por parte del profesor incidirá en la forma en que éste las enseña.

Además el profesor tiene en cuenta las funciones y tareas que cree más efectivas para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes y la adquisición de disposiciones y actitudes favorables hacia las matemáticas. Algunas de estas tareas las debe realizar él mismo y otras las llevarán a cabo los estudiantes.

En este capítulo reflexionaremos sobre las características de una enseñanza de las matemáticas que sea eficaz para el logro del aprendizaje significativo de los alumnos. Ello implica del profesor la labor docente de dirección y ayuda en los procesos de estudio. El profesor trata de conjugar las orientaciones curriculares con una visión constructiva de las matemáticas y del aprendizaje matemático, adoptando para ello modelos didácticos coherentes.

1. ¿Cuáles de los siguientes tipos de tareas podrían ser adecuados para los alumnos en una clase de matemáticas y con relación a qué temas? ¿Qué aprenden en cada una de ellas?

- Corregir el ejercicio o examen de un compañero.
- Búsqueda de información en Internet.
- Preparar un poster con los resultados de un trabajo en equipo.
- Construir la maqueta de un edificio.

2. COMPETENCIA Y COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Cuando analizamos el aprendizaje, o en los documentos curriculares, se habla con frecuencia de que el fin principal es que los estudiantes *comprendan* las matemáticas o que logren *competencia* o capacidad matemática.

Ejemplos:

Las orientaciones curriculares del DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989), indican que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos habrán *desarrollado la capacidad* de identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (suma, resta), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.

Para los grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria) el NCTM (2000) propone en uno de los estándares: *Comprender los significados de las operaciones y las relaciones entre ellas*

¿Cómo podemos reconocer la competencia y comprensión? Trataremos de clarificar estas nociones desde nuestra perspectiva del conocimiento matemático.

2.1. Nociones de competencia y comprensión

Una primera respuesta la encontramos a partir de diversos diccionarios:

- El diccionario de uso del español de María Moliner se refiere a la persona 'competente' como al "*conocedor de cierta ciencia o materia, o experto o apto en la cosa que se expresa o a la que se refiere el nombre afectado por 'competente'*". La competencia se relaciona con la aptitud, capacidad, disposición, *"circunstancia de servir para determinada cosa"*. Una persona apta, o capaz, es "*útil en general para determinado trabajo, servicio o función*".
- El diccionario Penguin de Psicología define "competencia" como "*la capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito"*. Pone en juego la noción de 'capacidad', que se refiere tanto al nivel general de inteligencia de alguien como a la cualidad o destreza que tiene esa persona para hacer una cosa particular.

Parece claro que la competencia es un rasgo cognitivo y disposicional del sujeto. También que será distinta según el campo profesional, el objeto de saber o la edad. Hablamos así de competencia matemática del ingeniero, del físico, o del estudiante de primaria o secundaria.

Ejemplos

Un ingeniero puede ser muy competente en su campo y no serlo como traductor de alemán. Una cocinera competente puede no ser competente como conductora. Alguien puede ser competente para el bricolage, la mecánica de los automóviles, pero un incompetente para la gestión burocrática, etc.

Vemos que la palabra *competencia* se refiere a un saber hacer específico. Generalmente tener competencia es equivalente a tener conocimiento práctico sobre algo; se usa habitualmente referido a destrezas manipulativas o procedimentales.

- En el caso de las matemáticas se podrá hablar de competencias generales, como competencia aritmética, algebraica, geométrica; o más específicas como, competencia para resolver ecuaciones, cálculo con fracciones, etc.
- Las expresiones del tipo, "A es competente para realizar la tarea T", indican que el sujeto A domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica *t* que resuelve o permite hacer bien la tarea T. Decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o que "sabe cómo hacer" la tarea.

3. Da una lista de competencias específicas relacionadas con la adición y substracción. ¿Cómo podrías evaluar tales competencias?

4. Analiza una lección de un texto de matemáticas de primer curso de primaria. ¿Qué competencias se tratan de desarrollar?

- El diccionario de uso del español de María Moliner define la *comprensión* como “entendimiento” o “facultad de comprender”. Comprender lo considera “entender; percibir el significado de algo”, “percibir las ideas contenidas en algo dicho o escrito”.
- Por tanto, cuando decimos “A comprende la técnica t que permite realizar la tarea T”, queremos decir que A sabe por qué dicha técnica es adecuada, conoce su ámbito de validez y la relaciona con otras técnicas.

Competencia y comprensión se complementan mutuamente:

- La competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento.
- La competencia pone en juego conocimientos de tipo procedimental, la comprensión requiere conocimiento conceptual.

La sociedad valora la acción; pero, ¿es posible o deseable la acción sin comprensión? Parece que la acción será más flexible y adaptable, generalizable, y por tanto, más eficaz si va acompañada de comprensión, de saber por qué se hacen así las cosas.

5. ¿Piensas que en el caso de las matemáticas, podemos separar los conocimientos de tipo conceptual y procedimental? ¿Por qué?

6. ¿En qué medida el profesional competente tiene también conocimientos conceptuales, lógicos y argumentativos.

7. Al preguntar a un alumno de 6º qué significa la frase “El número medio de hijos por familia en España es 1.2” da la siguiente respuesta: *“Significa que por cada familia, si hubiera que repartir todos los hijos, tocaría a cada una un hijo. El 1.2 es tan solo el número de la operación matemática”*. Analiza los tipos de comprensión y competencia sobre la media que podemos deducir de la respuesta del niño.

2.2. Comprensión instrumental y relacional

Richard Skemp[1] (psicólogo y matemático) analizó la diferencia entre *comprensión relacional* (saber qué) y *comprensión instrumental* (saber hacer). Estos dos tipos de comprensión no siempre van unidos.

Ejemplo

Es frecuente que los alumnos aprendan el algoritmo de la resta llevándose, sin saber por qué se aplica el algoritmo.

[1] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Otro caso es que los alumnos sumen correctamente fracciones pasando a común denominador, aunque no entiendan por qué no pueden sumarse directamente las fracciones de distinto denominador.

Al preguntarse si un tipo de comprensión es preferible al otro, Skemp concluye a favor de la comprensión relacional. El conocimiento instrumental implica la aplicación de múltiples reglas en lugar de unos pocos principios de aplicación general, y por tanto puede fallar en cuanto la tarea pedida no se ajuste exactamente al patrón estándar.

- Para las matemáticas relacionales Skemp citas las siguientes ventajas:

1. Son más adaptables a nuevas tareas. Al saber no sólo qué método funciona sino también por qué, el niño puede adaptar los métodos a los nuevos problemas, mientras que si sólo tiene comprensión instrumental necesita aprender un método diferente para cada nueva clase de problemas.

2. Las matemáticas relacionales son más fáciles de recordar, aunque son más difíciles de aprender. Ciertamente es más fácil que los alumnos aprendan que "el área de un triángulo = (1/2) base x altura", que aprender por qué eso es así. Ahora bien, tienen que aprender reglas separadas para los triángulos, rectángulos, paralelogramos, trapecios; mientras que la comprensión relacional consiste en parte en ver todas estas fórmulas con relación al área del rectángulo. Si se sabe cómo están interrelacionadas se pueden recordar mejor que como partes desconectadas. Hay más cosas que aprender –las conexiones y las reglas separadas- pero el resultado, una vez aprendido, es más duradero.

Vemos, por tanto, que aunque a corto plazo y en un contexto limitado las matemáticas instrumentales pueden estar justificadas, no pueden estarlo a largo plazo y en el proceso educativo del niño.

- Sin embargo, algunos profesores enseñan unas matemáticas instrumentales, por las siguientes razones:

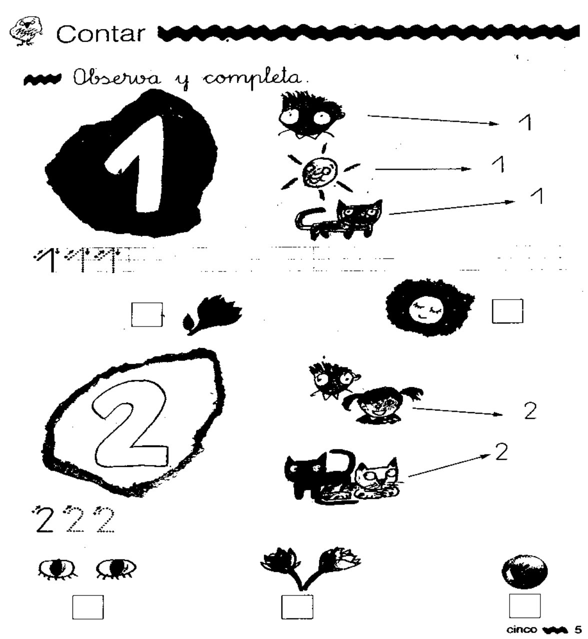
  1. Son usualmente más fáciles de aprender; por ejemplo, es difícil entender relacionalmente la multiplicación de dos números negativos, o la división de fracciones , mientras que reglas como "Menos por menos, más" y "para dividir por una fracción, multiplicas en cruz " se recuerdan con facilidad.

  2. Debido a que se requieren menos conocimientos, permite proporcionar la respuesta correcta de manera más rápida y fiable que la que se consigue mediante un pensamiento relacional.

  3. Al poder dar la respuesta correcta rápidamente el alumno puede obtener un sentimiento de éxito.

Estas argumentaciones, presentadas por Skemp en los años setenta, sobre las relaciones entre comprensión instrumental y relacional nos parecen igualmente válidas para las relaciones entre competencia y comprensión entendidas como hemos propuesto en la primera sección.

8. Analiza en la siguiente ficha, tomada de un texto escolar. ¿Qué conocimientos instrumentales y relacionales se requieren para su realización. ¿Cómo podríamos distinguir si un niño que realiza la tarea con competencia, también comprende lo que hace



2.3. Los objetos de comprensión y competencia

Para lograr la comprensión y la competencia matemática, tenemos que responder a dos cuestiones básicas:

- ¿Qué comprender? ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que queremos que nuestros alumnos lleguen a dominar? La respuesta a estas preguntas es el eje descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender. Definir la “buena” comprensión y la “buena competencia” matemática requiere definir previamente las “buenas” matemáticas.
- ¿Cómo lograr la comprensión y la competencia por parte de nuestros alumnos? La respuesta a esta pregunta es el eje procesual que indicará las fases o momentos necesarios para el logro tanto de la “buena” comprensión como de la “buena” competencia.

Nuestras ideas sobre el logro de la competencia y comprensión están, por consiguiente, íntimamente ligadas a cómo concebimos el conocimiento matemático[2]. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué

[2] Si, por ejemplo, consideramos el conocimiento matemático como información internamente representada, la comprensión ocurre cuando las representaciones logran conectarse en redes progresivamente más estructuradas y cohesivas. Pero equiparar la actividad matemática al procesamiento de información nos parece excesivamente reduccionista, por lo que, desde nuestro punto de vista las teorías de la comprensión derivadas de esta concepción no modelizarían adecuadamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en especial los aspectos sociales y culturales implicados en dichos procesos.

entendemos por comprender tales objetos. Para ello debemos responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprender existen para cada objeto matemático? ¿Qué aspectos o componentes de la práctica y el discurso matemático es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo articular el estudio de sus diversas componentes?

9. Supón que tienes que enseñar los números del 10 al 15 a un niño de primer curso de Primaria. Analiza la estructura de este conocimiento. ¿Qué conceptos, representaciones, procedimientos debe aprender el niño si queremos que logre competencia y comprensión de estos números? ¿Cómo podríamos secuenciar su enseñanza? Da algunos ejemplos de actividades que resulten significativas para este aprendizaje.

10. ¿Te parece suficiente el modelo epistemológico en el que de manera implícita basa Skemp su análisis de la comprensión instrumental y relacional, y que le lleva a considerar dos tipos de matemáticas: una matemática instrumental y otra relacional? ¿Cuáles son las características de ambas matemáticas? ¿Cómo están relacionadas? ¿Qué otras facetas deberíamos tener en cuenta?

Hemos visto que todo modelo de competencia y comprensión matemática involucra una determinada manera de entender las matemáticas y los objetos matemáticos. El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático que hemos expuesto en el capítulo 1 debe llevarnos, coherentemente, a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática.

11. ¿Piensas que se puede concebir la comprensión y competencia como estados dicotómico, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un tema matemático? ¿Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además dependen y deberán ser valorados respecto a los contextos institucionales correspondientes?.

12. A continuación tienes algunas de las respuestas de alumnos del primer curso de la especialidad de maestro de primaria a la pregunta *¿Qué significa saber matemáticas?* formulada cuando ingresan en la facultad. Coméntalas teniendo en cuenta las consideraciones anteriores sobre comprensión y competencia.

- Saber hacer los cálculos y resoluciones de problemas apropiados para la edad del alumno.
- Adquirir y utilizar los métodos y estrategias necesarias para poder resolver los ejercicios.
- Aplicar los contenidos matemáticos que han aprendido.
- Tener la capacidad suficiente para poder resolver o explicar cualquier cuestión relacionada con las matemáticas.
- Tener interiorizados conocimientos sobre la materia en cuestión.
- Entenderemos por "saber matemáticas" que cualquier individuo haya adquirido unos conceptos básicos
- Saber matemáticas significa tener conocimientos sobre esta asignatura dependiendo del nivel en que se encuentre.

3. APRENDER Y ENSEÑAR MATEMATICAS

De acuerdo con nuestra concepción de las matemáticas, descrita en el capítulo 1, "conocer" o "saber" matemáticas, es algo más que repetir las definiciones o ser capaz de identificar propiedades de números, magnitudes, polígonos u otros objetos matemáticos. La persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido.

Ejemplos:

Si no se pone a los niños en situación de contar o de comparar cantidades de objetos, de ordenar colecciones, no captarán el sentido de los números naturales.

Es difícil comprender la utilidad de los números enteros negativos si no nos hemos encontrado con la necesidad de resolver algunas ecuaciones algebraicas cuya solución es negativa.

- Es frecuente que las orientaciones curriculares insistan en que el aprendizaje de las matemáticas debe ser significativo y que para conseguirlo *"Los estudiantes deben aprender las matemáticas con comprensión, construyendo activamente los nuevos conocimientos a partir de la experiencia y los conocimientos previos"* (NCTM, 2000, Principio de Aprendizaje)
- Las orientaciones curriculares consideran que el aprendizaje significativo supone comprender y ser capaz de aplicar los procedimientos, conceptos y procesos matemáticos, y para ello deben coordinarse el conocimiento de hechos, la eficacia procedimental y la comprensión conceptual.

13. Supongamos que quieres lograr de tus alumnos de primaria un aprendizaje significativo de la multiplicación de números naturales de hasta dos cifras. Enumera:

- Algunos hechos que los alumnos deben conocer.
- Algunos procedimientos que deben dominar.
- Algunos conceptos y propiedades que deben comprender.

Redacta un ejercicio de evaluación para cada uno de ellos.

14. ¿Por qué los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprensión a menudo no están seguros de cuándo y cómo usar lo que conocen, y ese aprendizaje es con frecuencia frágil?

15. ¿Por qué el aprendizaje con comprensión hace más fácil el aprendizaje posterior y las matemáticas tienen más sentido y son más fáciles de recordar y de aplicar cuando los estudiantes conectan de manera significativa los nuevos conocimientos con los ya construidos?.

3.1. Papel de la resolución de problemas en el aprendizaje significativo

La actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad.

El trabajo del alumno en la clase de matemáticas debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos:

- el alumno investiga y trata de resolver problemas, predice su solución (formula conjeturas),
- trata de probar que su solución es correcta,
- construye modelos matemáticos,
- usa el lenguaje y conceptos matemáticos, incluso podría crear sus propias teorías,
- intercambia sus ideas con otros,
- finalmente reconoce cuáles de estas ideas son correctas- conformes con la cultura matemática-, y entre todas ellas elige las que le sean útiles.

Por el contrario, el trabajo del profesor es, en cierta medida, inverso al trabajo de un matemático:

- En lugar de partir de un problema y llegar a un conocimiento matemático, parte de un conocimiento matemático y busca uno o varios problemas que le den sentido para proponerlo a sus alumnos (recontextualización).
- Una vez producido un conocimiento, el matemático lo despersonaliza. Trata de quitarle todo lo anecdótico, su historia y circunstancias particulares, para hacerlo más abstracto y dotarlo de una utilidad general. El profesor debe, por el contrario, hacer que el alumno se interese por el problema (repersonalización). Para ello, con frecuencia busca contextos y casos particulares que puedan motivar al alumno.

16. Busca algunos problemas interesantes para los alumnos que le sirvan para comprender la multiplicación de fracciones. ¿Cómo se ejemplifican los procesos de recontextualización y repersonalización en esta actividad?

No basta con cualquier solución a un problema. El profesor trata de ayudar a sus alumnos a encontrar las que son “correctas” matemáticamente. El conocimiento matemático tiene una dimensión cultural. Por ello el profesor ha de ayudar a sus alumnos a encontrar o construir este "saber cultural" de modo que progresivamente se vayan incorporando a la comunidad científica y cultural de su época.

3.2. Enseñanza de las matemáticas

La mayor parte de los profesores comparten actualmente una *concepción constructivista* de las matemáticas y su aprendizaje. En dicha concepción, la actividad de los alumnos al resolver problemas se considera esencial para que éstos puedan construir el conocimiento.

Pero el aprendizaje de conceptos científicos complejos (por ejemplo de conceptos físicos o matemáticos) en adolescentes y personas adultas, no puede basarse solamente en un constructivismo estricto. Requeriría mucho tiempo de aprendizaje y, además, se desperdiciarían las posibilidades de poder llevar al alumno rápidamente a un estado más avanzado del conocimiento, mediante técnicas didácticas adecuadas.

17. ¿Por qué una interpretación ingenua del constructivismo, daría un papel limitado a la enseñanza, considerando que el principal trabajo del profesor sería seleccionar problemas significativos para sus alumnos?.

18. ¿Qué implicaciones se deducen para la enseñanza del hecho que las matemáticas no constituyen solamente una actividad sino también son un lenguaje simbólico y un sistema conceptual, lógicamente organizado?

- El aprendizaje de una lengua, requiere la práctica de la conversación desde su comienzo, pero si queremos lograr un aprendizaje funcional que permita la comunicación, será preciso el estudio de la gramática. Del mismo modo, además de *hacer matemáticas* es preciso estudiar las *reglas matemáticas* para poder progresar en la materia.

- Puesto que disponemos de todo un sistema conceptual previo, herencia del trabajo de las mentes matemáticas más capaces a lo largo de la historia desaprovecharíamos esta herencia si cada estudiante tuviese que redescubrir por sí mismo todos los conceptos que se le tratan de enseñar.

La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construyen en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos.

19. La mejora de la educación matemática para todos los estudiantes requiere una enseñanza eficaz de las matemáticas en las clases. Comenta la cita siguiente *"La enseñanza eficaz de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan aprender y, en consecuencia, les desafía y apoya para aprender bien los nuevos conocimientos"* (NCTM, 2000, Principio de la Enseñanza).

Los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que les proporcionan los profesores. Por tanto, la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarlas en la resolución de problemas, y su confianza y buena disposición hacia las matemáticas están condicionadas por la enseñanza que encuentran en la escuela.

No hay recetas fáciles para ayudar a todos los estudiantes a aprender, o para que todos los profesores sean eficaces. No obstante, los resultados de investigaciones y experiencias que han mostrado cómo ayudar a los alumnos en puntos concretos deberían guiar el juicio y la actividad profesional. Para ser eficaces, los profesores deben conocer y comprender con profundidad las matemáticas que están enseñando y ser capaces de apoyarse en ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas docentes. Necesitan comprender y comprometerse con sus estudiantes en su condición de aprendices de matemáticas y como personas y tener destreza al elegir y usar una variedad de estrategias pedagógicas y de evaluación. Además, una enseñanza eficaz requiere una actitud reflexiva y esfuerzos continuos de búsqueda de mejoras.

20. A continuación tienes algunas de las respuestas de alumnos del primer curso de la especialidad de maestro de primaria a la pregunta *¿Qué significa enseñar matemáticas?*, formulada cuando ingresan en la facultad. ¿Crees que la mayoría corresponden a una concepción constructivista?.

- Para enseñar matemáticas se requiere de unos conocimientos previos de ámbito matemático, y al mismo tiempo ser capaz de transmitir tus conocimientos de manera clara, concisa y ordenada a los alumnos.
- Saber transmitir de forma coherente y que se pueda entender los objetivos, contenidos y procedimientos de esta materia.
- Transmitir tus conocimientos adaptándolos al ciclo educativo al que va dirigido.
- Explicar de manera clara y coherente de forma que los otros te entiendan sin dificultades.
- Tener los conocimientos adecuados para motivar al niño a aprender matemáticas.
- Es utilizar todos los procedimientos, recursos y estrategias necesarias para ayudar al alumno (suporte pedagógico) a adquirir unos aprendizajes significativos.

4. ESTUDIO DIRIGIDO DE LAS MATEMÁTICAS

Llamaremos *instrucción matemática* o *estudio dirigido de las matemáticas* a la enseñanza y aprendizaje organizado de un contenido matemático dentro de la clase de matemáticas.

Ejemplos:

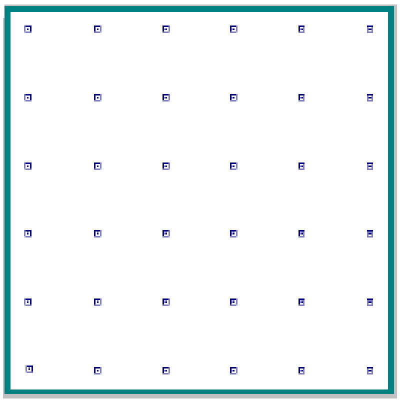
- El estudio dirigido del sistema de numeración decimal en la escuela primaria;
- El estudio dirigido de la suma de números naturales en una clase de primaria
- El estudio dirigido de las funciones en una clase de educación secundaria.

En los ejemplos anteriores, y en todo proceso de instrucción matemática intervienen:

- Un contenido matemático, que incluye todas las prácticas en torno al mismo. En el segundo ejemplo anterior estas prácticas incluirían los algoritmos de la suma, el aprendizaje de las tablas, la forma de colocación de los sumandos y el total, la resolución de problemas sencillos, etc. Hablamos de *sistema de prácticas matemáticas* relativas a la suma.
- Unos sujetos que tratan de adquirir (apropiarse, construir) dicho contenido, en nuestro ejemplo los alumnos de la clase.
- El profesor, que dirige y organiza el proceso de instrucción.
- Los recursos didácticos o medios instruccionales, entre los que incluimos el tiempo, libros, fichas, materiales manipulativos, etc.

Un supuesto básico del constructivismo piagetiano es el aprendizaje por adaptación a un medio. Ciertamente que el conocimiento progresa como resultado de la construcción personal del sujeto enfrentado a tareas problemáticas. Pero es preciso tener también en cuenta el papel de la interacción entre los propios alumnos y la de éstos con el profesor. Esta última es crucial para orientar e impulsar el aprendizaje, debido a que el conocimiento matemático tiene un componente discursivo (basado en reglas y argumentos) y no sólo un componente práctico (basado en problemas y acciones).

21. Damos a una pareja de niños de segundo curso de primaria un geoplano y una caja de gomas de colores, con la siguiente consigna: *Construye todos los triángulos de diferentes formas y tamaño como puedas. Discute con tu compañero cuáles son iguales y por qué. ¿Cuáles son diferentes y por qué?*



a) ¿Qué estrategias pueden usar los niños de esta edad para realizar la tarea? ¿Qué aprenden al realizarla?

b) ¿Qué vocabulario podrían emplear? ¿Qué conceptos y propiedades hay implícitos detrás de los mismos?

c) ¿Por qué es mejor que los dos niños trabajen juntos, en lugar de trabajar por separado?

d) Indica algunas posibles dificultades o errores y cómo el profesor puede ayudar a superarlas.

e) ¿Cómo cambia la tarea si en vez del geoplano usamos papel y lápiz? ¿Y si les damos una colección de figuras triangulares planas de plástico para clasificar?

La *instrucción matemática significativa* atribuye un papel clave a la interacción social, a la cooperación, al discurso, y a la comunicación, además de a la interacción del sujeto con las situaciones-problemas. El sujeto aprende mediante su interacción con un medio instruccional, apoyado en el uso de recursos simbólicos, materiales y tecnológicos disponibles en el entorno. Algunas consecuencias de este enfoque de la enseñanza son las siguientes:

1. Para que el estudio de un cierto concepto sea significativo, debemos mostrar a los alumnos una muestra representativa de las prácticas que lo dotan de significado. Al planificar la enseñanza debemos partir del análisis del significado de dicho concepto. Puesto que el tiempo de enseñanza es limitado, se procurará seleccionar las prácticas más representativas.

Ejemplo

Al enseñar a los niños la clasificación de los cuadriláteros, será mejor mostrar algún ejemplo de cada tipo diferente de cuadrilátero (rombos, cuadrados, trapecios, paralelogramos, etc.) más que centrarnos en muchos ejemplos del mismo tipo (solo paralelogramos). Conviene también plantearles problemas variados (construcción, medida del perímetro, clasificación, cálculo y medida de área, etc.), más que repetir muchas veces el mismo tipo de problema. El significado del concepto *cuadrilátero* será más completo cuanto mayor sea la gama de propiedades, lenguaje y problemas presentados.

2. Es importante dar a los alumnos la oportunidad de plantearse y de tratar de resolver problemas interesantes para que: 1) formulen hipótesis y conjeturas, 2) traten de usar diferentes sistemas de representación, 3) traten de comunicar y validar las soluciones propuestas, 4) confronten sus soluciones con las de otros compañeros, y, finalmente, 5) traten de confrontar su solución con la solución que se considera correcta en matemáticas.
3. Debemos ser conscientes que al final del proceso de instrucción el conocimiento construido por cada alumno será siempre parcial y dependerá del contexto institucional, material y temporal en que tiene lugar el proceso[3].

Si queremos que los alumnos adquieran competencia y comprensión sobre los distintos componentes de un contenido matemático, debemos tener en cuenta dichos componentes al planificar y llevar a cabo la enseñanza. Para ello el investigador francés Brousseau propuso diseñar situaciones didácticas de diversos tipos:

- *Acción,* en donde el alumno explora y trata de resolver problemas; como consecuencia construirá o adquirirá nuevos conocimientos matemáticos; las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos, para que deseen resolverlos; deben ofrecer la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.
- *Formulación/ comunicación*, cuando el alumno pone por escrito sus soluciones y las comunicar a otros niños o al profesor; esto le permite ejercitar el lenguaje matemático.
- *Validación,* donde debe probar que sus soluciones son correctas y desarrollar su capacidad de argumentación.
- *Institucionalización,* donde se pone en común lo aprendido, se fijan y comparten las definiciones y las maneras de expresar las propiedades matemáticas estudiadas.

El tipo de discurso -comunicación oral o escrita- del profesor y los alumnos es un aspecto determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si sólo hay comunicación del profesor hacia los alumnos, en una enseñanza expositiva, a lo más con apoyo de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas, que si el profesor les anima a que comuniquen sus ideas a otros niños y al profesor.

22. Se da a una pareja de niños nueve fichas cuadradas del mismo tamaño, con la siguiente consigna:

Buscad la manera de unir las nueve fichas cuadradas para formar el polígono que tenga el menor perímetro posible. Busca también el polígono con el mayor perímetro posible.

¿Qué tipo de situación didáctica se plantea? ¿Cuál es el conocimiento que se adquiere al resolver la tarea? ¿Piensas que puede variar la dificultad si sólo damos al niño una hoja de

[3] Al reconocer la complejidad del conocimiento matemático, no podremos concebir competencia y comprensión como estados dicotómicos – un niño es o no competente, comprende o no comprende un tema matemático-. La competencia y comprensión son crecientes y progresivas a lo largo del aprendizaje.

papel y un lápiz? ¿Y si la hoja es cuadriculada? ¿Cómo se podría completar la tarea si queremos que aparezcan los cuatro tipos de situaciones: acción, formulación, validación e institucionalización?

5. NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS. CONTRATO DIDÁCTICO

La clase de matemáticas está con frecuencia regida por "obligaciones" o normas no explícitas entre el profesor y los alumnos. Estas "normas sociales" guían la colaboración de los alumnos, y sus obligaciones, así como su forma de reaccionar ante un error o una indicación del profesor.

Ejemplos

Los niños suponen que han de ser críticos hacia las afirmaciones, tanto propias como de otros niños.

Se espera del alumno que explique las soluciones de los problemas que el profesor le propone.

El profesor es quien pone los exámenes. Los alumnos aceptan la calificación del profesor.

Estas normas determinan un *microcultura* del aula y tienen las siguientes características:

- Algunas son generales y se pueden aplicar a cualquier disciplina.
- Regulan el funcionamiento de las actividades docentes y discentes.

Llamamos *contrato pedagógico* al conjunto de estas normas que no están ligadas a una disciplina específica. Otras normas son específicas de la actividad matemática, regulan, por ejemplo, las argumentaciones matemáticas e influyen en las oportunidades de aprendizaje.

Ejemplos:

Hay un acuerdo sobre lo que es "matemáticamente diferente", o "matemáticamente relevante " en el aula. Así, cuando esperamos que el niño resuelva un problema de forma aritmética y uno de los alumnos idea una solución original y completamente inesperada

También hay un convenio implícito sobre lo que es "matemáticamente eficiente", "matemáticamente elegante", o "matemáticamente aceptable".

En didáctica de las matemáticas se habla de *contrato didáctico* para describir y explicar las obligaciones o normas no explícitas que rigen las interacciones entre el profesor y los alumnos en el aula de matemáticas (en general de una disciplina específica). El "contrato didáctico" regula los derechos y obligaciones del profesor y los alumnos. Es el resultado de un proceso de negociación entre los alumnos, el profesor y el medio educativo. Uno de los componentes esenciales del contrato didáctico son los criterios de evaluación explícitos, pero hay otros no explicitados que sólo se detectan cuando el profesor plantea actividades poco habituales que vulneran las reglas del contrato, lo cual produce el consiguiente desconcierto en los alumnos. Los alumnos, en su adaptación al medio escolar, llegan a desarrollar un sentido que les permite captar cuáles son las reglas del contrato didáctico en cada caso.

La importancia de los fenómenos de contrato didáctico se debe a que condicionan de manera determinante el tipo de aprendizaje. La actitud del profesor determina con frecuencia de manera inconsciente las relaciones de los alumnos con la matemática. Por ejemplo:

- actitud de espera de la explicación del profesor,

- interés en investigar la situación,
- control de los resultados, por parte de los alumnos.

Si el profesor quiere, por ejemplo, fomentar la iniciativa del alumno puede optar por no incorporar indicaciones sobre la solución al presentar un problema. Este es un ejemplo de una *ruptura* del “contrato” habitual, ya que se supone que el profesor "sabe la solución", y su función como profesor debería ser "enseñar" ese conocimiento.

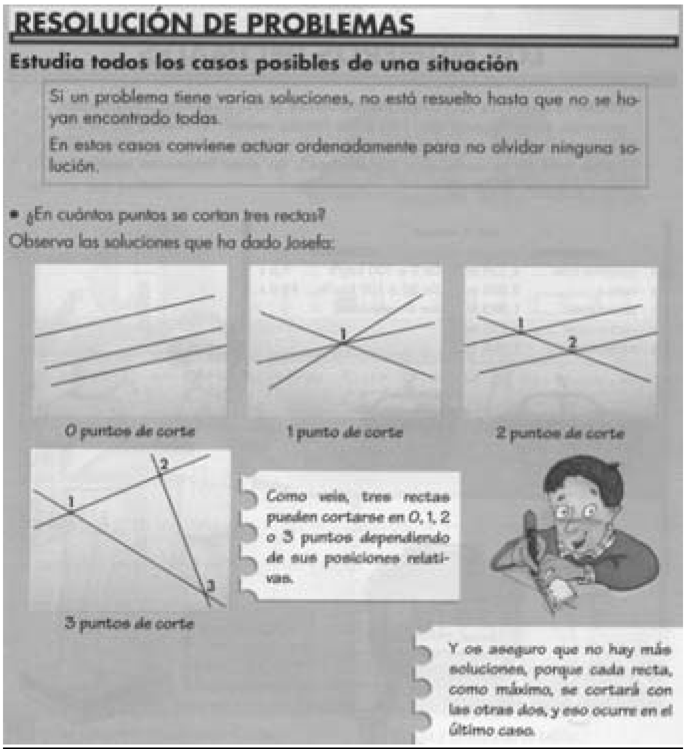
23. Analiza esta página de un texto de primaria.

¿Por qué no podemos hablar aquí de situación problemática, propiamente dicha?

¿Piensas que es frecuente este tipo de situaciones en los libros de texto?

¿Y en la clase de matemáticas?

¿Qué habría que cambiar en la situación para convertirla en un verdadero problema?



6. DIFICULTADES, ERRORES Y OBSTÁCULOS

Todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. El profesor debe ser sensible a las ideas previas de los alumnos y utilizar las técnicas del conflicto cognitivo para lograr el progreso en el aprendizaje.

- Hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.
- El término *dificultad* indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

Las creencias del profesor sobre los errores de los alumnos dependen de sus propias concepciones sobre las matemáticas. Aquellos que no han tenido ocasión de conocer cómo se desarrollan las matemáticas, o no han realizado un cierto trabajo matemático piensan que hay que eliminar el error a toda costa. Cambiar su manera de pensar implica un cierto cambio en la relación de dicho profesor con respecto a la actividad matemática.

El modelo de aprendizaje es también determinante. En un aprendizaje conductista, el error tiene que ser corregido, mientras que es constitutivo del conocimiento en un aprendizaje de tipo constructivista.

Algunas causas de errores y dificultades son las siguientes:

1. Dificultades relacionadas con los contenidos matemáticos

La abstracción y generalización de las matemáticas es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis del contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

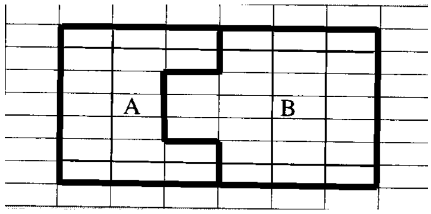
- A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente. Decimos que existe un *obstáculo*. Con frecuencia el origen de los errores no es sencillo de identificar, aunque a veces se encuentran ciertos errores recurrentes, para los cuales la investigación didáctica aporta explicaciones y posibles maneras de afrontarlos.

Ejemplo

> La ordenación de los números decimales 2'47 y 2'328 es una tarea para la que un alto porcentaje de alumnos dicen que 2'328 es mayor que 2'47, "porque 328 es mayor que 47". Los números decimales los están considerando como si fueran "dos números naturales separados por una coma", y comparan ambos números separadamente.

La identificación de tales obstáculos revela complejidades del significado de los objetos matemáticos que pueden pasar inadvertidas. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Parece razonable pensar que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos.

Ejemplo[4]

En el ítem adjunto se obtienen habitualmente porcentajes de respuestas correctas bastante desiguales a las partes a) y b) (del orden del 90% a la a) y del 40% a la b). Alrededor del 40% de alumnos de 6º de primaria afirman que el perímetro de la región B es mayor que el de la A. Estos alumnos consideran que el área y el perímetro son magnitudes relacionadas de manera que varían en el mismo sentido. "A más área, mayor perímetro". Se ve sin dificultad que la parcela B es mayor que la A (área B > área A). Deducen de esto que el perímetro de B será mayor que el de A.	 Un terreno se ha dividido como se indica en la figura. Señalar en cada caso la respuesta que consideres correcta: a) - El área de la parcela A es la más grande - Las dos parcelas tienen igual área - El área de la parcela B es la más grande. b)- El perímetro de la parcela A es el mayor - Las dos parcelas tienen el mismo perímetro - El perímetro de la parcela B es el mayor.

2. Dificultades causadas por la secuencia de actividades propuestas

Se puede dar el caso de que la propuesta de actividades que presenta el profesor a los alumnos no sea potencialmente significativa, por causas diferentes:

a) Cuando el profesor no estructura bien los contenidos que quiere enseñar.
b) Cuando los materiales que ha escogido, como por ejemplo los libros de texto, no son claros -ejercicios y problemas confusos, mal graduados, rutinarios y repetitivos, errores de edición, etc.
c) Cuando la presentación del tema que hace el profesor no es clara ni está bien organizada -no se le entiende cuando habla, habla demasiado rápido, la utilización de la pizarra es caótica, no pone suficiente énfasis en los conceptos clave del tema, etc.

El profesor debe analizar las características de las situaciones didácticas sobre las cuales puede actuar, y su elección afecta al tipo de estrategias que pueden implementar los estudiantes, conocimientos requeridos, etc. Estas características suelen denominarse *variables didácticas* y pueden ser relativas al enunciado de los problemas o tareas, o también a la organización de la situación (trabajo individual, en grupo, etc.).

La edad de los alumnos o sus conocimientos previos influyen sobre el éxito de una tarea. Pero sobre estas variable poco o nada puede hacer el profesor en el momento en que gestiona la situación. En consecuencia, no se trata de variables didácticas.

Ejemplo

En un problema del tipo, "Juan tenía 69 bolas, gana 2. ¿Cuántas bolas tiene ahora?" los valores numéricos elegidos permiten que el alumno encuentre la solución con la estrategia simple del recuento (69, 70, 71). Si cambia el enunciado de manera que en lugar de ganar 2

[4] Briand, J. y Chevalier, M.C (1995). *Les enjeux didactiques dans l'ensignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

bolas, gana 28, el recuento es una técnica poco eficaz, por lo que el alumno probablemente se verá forzado a usar otros procedimientos.

3. Dificultades que se originan en la organización del centro.

En ocasiones el horario del curso es inapropiado, el número de alumnos es demasiado grande, no se dispone de materiales o recursos didácticos, etc.

4. Dificultades relacionadas con la motivación del alumnado

Puede ocurrir que las actividades propuestas por el profesorado a los alumnos sean potencialmente significativas y que la metodología sea la adecuada, pero que el alumnado no esté en condiciones de hacerlas suyas porque no esté motivado. Este tipo de dificultades está relacionado con la autoestima y la historia escolar del alumno.

5. Dificultades relacionadas con el desarrollo psicológico de los alumnos

Una fuente de dificultades de aprendizaje de los alumnos de primaria hay que buscarla en el hecho de que algunos alumnos aún no han superado la etapa preoperatoria (teoría de Piaget) y realizan operaciones concretas, o bien que aquellos que aún están en la etapa de las operaciones concretas realicen operaciones formales. En la planificación a largo plazo del currículo habrá que tener en cuenta dos aspectos fundamentales:

- Cuáles de los objetivos del área de matemáticas corresponde a la etapa preoperatoria, cuáles a la de las operaciones concretas y cuáles a la de las operaciones formales
- Precisar las edades en que los alumnos pasan aproximadamente de una etapa a la otra.

Ejemplo:

Una de las maneras más habituales para introducir la fórmula de la longitud de una circunferencia en primaria consiste en hacer medir a los alumnos diferentes longitudes y diámetros de objetos circulares como platos, monedas, etc. para que comprueben que el cociente entre la longitud y el diámetro siempre es el mismo y que aproximadamente es 3,14. Para ello, los alumnos pueden rodear con una cuerda el perímetro del plato y luego extenderla sobre una regla para medirla. Si algún alumno no está en la etapa operatoria puede no entender que la longitud de la cuerda no varía al extenderla sobre la regla

6. Dificultades relacionadas con la falta de dominio de los contenidos anteriores

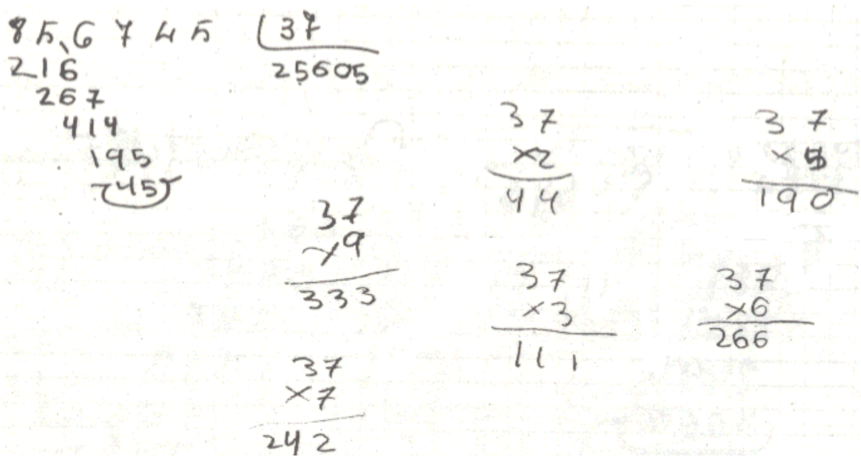
Puede ocurrir que el alumno, a pesar de tener un nivel evolutivo adecuado, no tenga los conocimientos previos necesarios para poder aprender el nuevo contenido, y, por tanto, la "distancia" entre el nuevo contenido y lo que sabe el alumno no es la adecuada. La evaluación inicial puede detectar los contenidos previos que hay que adquirir para conseguir el aprendizaje del contenido previsto.

Ejemplo: Un alumno con dificultades en el algoritmo de la resta es de esperar que tenga dificultades con el algoritmo de la división.

24. En una clase de 6º de primaria el maestro no ha dado ninguna justificación de la fórmula de la longitud de una circunferencia ni de la fórmula del área del círculo. ¿Qué tipo de error podemos esperar de sus alumnos?

25. De acuerdo con el esquema propuesto en el apartado 6 encuentra una explicación para las siguientes respuestas:

a)[5]



b) El alumno renuncia a todo tipo de reacción mostrando una actitud de indiferencia, falta de atención y aparente pereza.

7. ESTÁNDARES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Al reflexionar sobre qué caracteriza a un buen profesor de matemáticas o sobre cómo conducir una clase de matemáticas, es útil analizar algunos documentos preparados sobre esta problemática por asociaciones de profesores. Una de estas asociaciones, de gran prestigio, que incluye también investigadores en educación matemática es el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M).

Dicha asociación elaboró en 1991 un documento titulado *Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas* (N.C.T.M. 1991) con el fin de que fuese una referencia para orientar la labor de los profesores de matemáticas en la década de los 90. A continuación sintetizamos dicho documento.

7.1. Supuestos de los estándares

1. El fin de la enseñanza de las matemáticas es ayudar a los estudiantes a desarrollar su capacidad matemática:

El currículo matemático propuesto en los "Estándares" trata de fomentar el razonamiento matemático, la comunicación, la resolución de problemas y el establecimiento de conexiones entre las distintas partes de las matemáticas y las restantes disciplinas. Para ello se sugiere que:

- Los profesores deben ayudar a cada estudiante para que desarrolle su comprensión

[5] Fernández, Llopis y Pablo (1985). Niños con dificultades para las matemáticas. Madrid:CEPE.

conceptual y procedimental de cada núcleo conceptual matemático: números, operaciones, geometría, medición, estadística, probabilidad, funciones y álgebra y los relacione entre sí.

- Deben tratar de que todos los estudiantes formulen y resuelvan una amplia variedad de problemas, hagan conjeturas, den argumentos, validen soluciones, y evalúen si las afirmaciones matemáticas son o no plausibles.
- Deben estimular la disposición de los estudiantes para usar e interesarse por las matemáticas, para apreciar su belleza y utilidad, y comprender a los que se quedan atascados o despistados.
- Deben ayudar a los estudiantes a reconocer que en el trabajo matemático llegamos a veces a callejones sin salida y animarles a perseverar cuando se enfrentan con problemas intrincados, así como a desarrollar auto confianza e interés.

2. Lo que los estudiantes aprenden está fundamentalmente conectado con el cómo lo aprenden

Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno y del tipo de tareas y discurso en que participan. Lo que los estudiantes aprenden -sobre conceptos y procedimientos particulares así como su capacidad de razonamiento - depende de cómo se implican en la actividad en clase de matemáticas. Su actitud hacia las matemáticas también queda marcada por tales experiencias. Por consiguiente, hemos de cuidar no sólo el currículo, sino también la metodología de enseñanza si queremos desarrollar la capacidad matemática de los estudiantes.

3. Todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente

Cada estudiante puede -y debe- aprender a razonar y resolver problemas, hacer conexiones a través de una rica red de tópicos y experiencias, y a comunicar ideas matemáticas. Aunque los objetivos tales como hacer conjeturas, argumentar sobre las matemáticas usando la evidencia matemática, formular y resolver problemas parezcan complejos, no están destinados sólo a los chicos "brillantes" o "capaces matemáticamente".

4. La enseñanza es una práctica compleja y por tanto no reducible a recetas o prescripciones

La enseñanza de las matemáticas se apoya en el conocimiento de varios dominios:

- conocimiento general de las matemáticas,
- de cómo los estudiantes aprenden matemáticas en general,
- del contexto de la clase, la escuela y la sociedad,
- la enseñanza es específica del contexto.

Ejemplo

El conocimiento teórico general sobre el desarrollo del adolescente, puede sólo parcialmente informar una decisión sobre estudiantes particulares aprendiendo un concepto matemático particular en un contexto dado.

Los profesores combinan el conocimiento procedente de estos dominios diferentes para decidir cómo responder a la pregunta de un estudiante, cómo representar una idea matemática particular, hasta cuándo proseguir con la discusión de un problema, o qué tarea usar para introducir a los estudiantes en un tópico nuevo. Estas decisiones dependen de una variedad de factores antes los cuales el profesor debe encontrar un equilibrio.

26. ¿Por qué enseñar bien las matemáticas es un compromiso complejo, que no se puede reducir a un conjunto de recetas?.

La buena enseñanza depende de una serie de consideraciones y demanda que los profesores razonen de un modo profesional dentro de contextos particulares de trabajo. Los estándares para la enseñanza de las matemáticas están diseñados como una ayuda en tales razonamientos y decisiones resaltando aspectos cruciales para la creación del tipo de prácticas de enseñanza que apoyan los objetivos de aprendizaje. Se agrupan en cuatro categorías: *tareas*, *discurso del profesor y de los estudiantes*, *entorno* y *análisis*.

7.2. Tareas

Las tareas en que se implican los estudiantes - proyectos, problemas, construcciones, aplicaciones, ejercicios, etc. - y los materiales con los que trabajan enmarcan y centran sus oportunidades para aprender las matemáticas en la escuela. Dichas tareas:

- Proporcionan el estímulo para que los estudiantes piensen sobre conceptos y procedimientos particulares, sus conexiones con otras ideas matemáticas, y sus aplicaciones a contextos del mundo real.
- Pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas en el contexto de su utilidad.
- Expresan lo que son las matemáticas y lo que implica la actividad matemática. Pueden dar una visión de las matemáticas como un dominio de indagación valioso y atrayente.
- Requieren que los estudiantes razonen y comuniquen matemáticamente y promueven su capacidad para resolver problemas y para hacer conexiones.

Una responsabilidad central del profesor consiste en seleccionar y desarrollar tareas valiosas y materiales que creen oportunidades para que los estudiantes desarrollen su comprensión matemática, competencias, intereses y disposiciones.

27. En un grupo de alumnos de primaria, el profesor quiere trabajar las diferentes unidades de medida de longitud. Compara los dos tipos de tarea siguientes, desde el punto de vista de las oportunidades que proporcionan para aprender matemáticas. a. Realizar ejercicios de transformación y cálculo con diferentes unidades de medida, por ejemplo, pasando de metros a centímetros o sumando medidas expresadas en diferentes unidades y transformándolas a una unidad común. b. Se da a los alumnos reglas de 30 cm. de longitud y se les pide medir el perímetro de la clase. Los alumnos pueden usar si desean técnicas auxiliares, por ejemplo, contar el número de pasos que hay que dar alrededor de la clase, contar el número de baldosas cuadradas completas a lo largo del perímetro, midiendo los trozos de baldosas no completas, usar un carrete de hilo como ayuda, etc. El profesor no da indicaciones sobre cómo trabajar, aunque proporciona los recursos necesarios. Finalizada la tarea se produce una comparación de estrategias y soluciones.

7.3. Discurso

El discurso de una clase - los modos de representar, pensar, hablar, ponerse de acuerdo o en desacuerdo- es central para que los estudiantes comprendan que las matemáticas como un dominio de investigación humana con modos característicos de conocimiento.

El discurso incluye el modo en que las ideas son intercambiadas y lo que implican las ideas: Es conformado por las tareas en las que los estudiantes se comprometen y la naturaleza del entorno de aprendizaje; también influye sobre las mismas.

28. Da una lista de todos los tipos de actividades en un aula de matemáticas que puedan considerarse como parte del discurso. ¿Quién habla?, ¿Sobre qué?, ¿De qué manera? ¿Qué escriben las personas, qué registran y por qué? ¿Qué cuestiones son importantes? ¿Cómo se intercambian las ideas? ¿Qué ideas y modos de pensamiento son valorados? ¿Quién determina cuándo finalizar una discusión?

7.4. Entorno

El profesor de matemáticas es responsable de crear un entorno intelectual en que la norma consista en un serio compromiso hacia el pensamiento matemático, para que el entorno de la clase sea el fundamento de lo que los alumnos aprenden. Mas que un entorno físico, con bancos, cuadernos y posters, el entorno de la clase forma un currículo oculto con mensajes sobre lo que cuenta en el aprendizaje y la actividad matemática: ¿Pulcritud?, ¿Velocidad?, ¿Precisión? ¿Escuchar bien? ¿Ser capaz de justificar una solución? ¿Trabajar independientemente? Si deseamos que los estudiantes aprendan a hacer conjeturas, experimenten con aproximaciones alternativas para resolver problemas, y construir y responder a los argumentos de los demás, entonces la creación de un entorno que estimule este tipo de actividades es esencial.

7.5. Análisis

Los profesores deben ser responsables de analizar su práctica docente, para intentar comprender tanto como sea posible los efectos de la clase de matemáticas sobre cada estudiante. El profesor debe llevar un registro sobre su clase usando una variedad de estrategias y centrando la atención sobre una amplia matriz de dimensiones de la competencia matemática, como se indica en los Estándares de Currículo y Evaluación de las Matemáticas Escolares. Lo que los profesores aprenden de esto debería ser una fuente primaria de información para la planificación y mejora de la instrucción tanto a corto como a largo plazo. Algunas posibles preguntas son:

- ¿Uso buenas tareas, es decuado el discurso y el entorno de trabajo para estimular el desarrollo de la capacidad y el conocimiento matemático de los estudiantes?
- ¿Qué parecen comprender bien los estudiantes, y qué sólo parcialmente? ¿
- Qué conexiones parece que están haciendo?
- ¿Qué disposición matemática parecen que están desarrollando?
- ¿Cómo trabaja el grupo conjuntamente como una comunidad de aprendizaje dando sentido a las matemáticas?

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

El anexo 2.1. contiene el enunciado del conjunto de normas o criterios para el logro de una enseñanza eficaz de las matemáticas según el NCTM 91. Estudia con detenimiento cada uno de dichos estándares y contrástalos con las orientaciones metodológicas indicadas en los currículos españoles (estatal y autonómico), así como con las indicaciones sobre el estudio dirigido de las matemáticas incluidas en este capítulo.

2. REFLEXIÓN, REDACCIÓN Y DISCUSIÓN

Para las siguientes afirmaciones[6] expresa tu grado de acuerdo y explica las posibles razones de tu acuerdo o desacuerdo. Clasifícalas según las personas o instituciones que suelen manifestarlas.

a) Todos los niños pueden aprender matemáticas
b) Las matemáticas son muy difíciles
c) Las matemáticas son muy abstractas
d) Con tantos alumnos por clase es muy difícil dar clase
e) Los alumnos vienen mal preparados de los cursos anteriores
f) No están motivados para estudiar
g) Lo más importante es que el profesor domine la materia
h) Los profesores de primaria tienen pocos conocimientos de matemáticas
i) A este alumno le cuesta mucho
j) Me han puesto las clases a unas horas en las que es imposible explicar nada
k) A mí las matemáticas nunca me han ido bien / me cuestan mucho
l) Lo sabía pero en el examen me pongo nervioso y lo hago todo mal
m) No sirvo para las matemáticas
n) Este profesor se explica muy mal
o) Este alumno no hace nada pero no molesta, en cambio este, además de no hacer nada, distorsiona la clase
p) Cuando se explicó este tema yo estaba enfermo
q) Le faltan los conocimientos previos
r) Cuando yo estudiaba tampoco entendía las matemáticas

3. ENCUESTA DE ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

Plantea algunas preguntas a una pequeña muestra de niños para conocer sus actitudes y percepción de las matemáticas[7]. Por ejemplo,

-¿Qué asignatura te gusta más? ¿Se te da bien?

---

[6] Font, V (1998). Classificació de les dificultats d'aprenentatge dels continguts matemàtics. *Actes de les 3es Jornades de Didàctica de les Matemàtiques.* (pp. 41-50). Ed. Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals. Reus

[7] Reys, R. E. y cols (2001). Helping children learn mathemtics. New York: John Wiley. (p. 24)

- ¿Crees que saber matemáticas te ayudará cuando seas mayor? ¿Por qué?
- Si te digo, "Vamos a hacer matemáticas". ¿Qué harías?
- ¿Crees que a tu profesor le gusta enseñar matemáticas? Dime por qué.

4. ERRORES Y OBSTÁCULOS

1. Encuentra una explicación para las siguientes respuestas de un alumno a estas tres sustracciones:

287	369	1528
- 75	- 295	- 233
212	134	1315

2. Algunos alumnos resuelven tareas aritméticas aplicando las siguientes reglas de su propia invención:
   1. No se puede dividir *a* por *b* a menos que *a* sea mayor que b.
   2. No se puede restar *a* de b a menos que *a* sea menor que *b*.
   3. Cuando se multiplican dos números, el resultado es mayor que ambos números.
   4. Cuando se suman dos números, el resultado es mayor que cada uno de los sumandos.
   5. Para hacer una adición en columna, se "alinean" las cifras a la derecha.

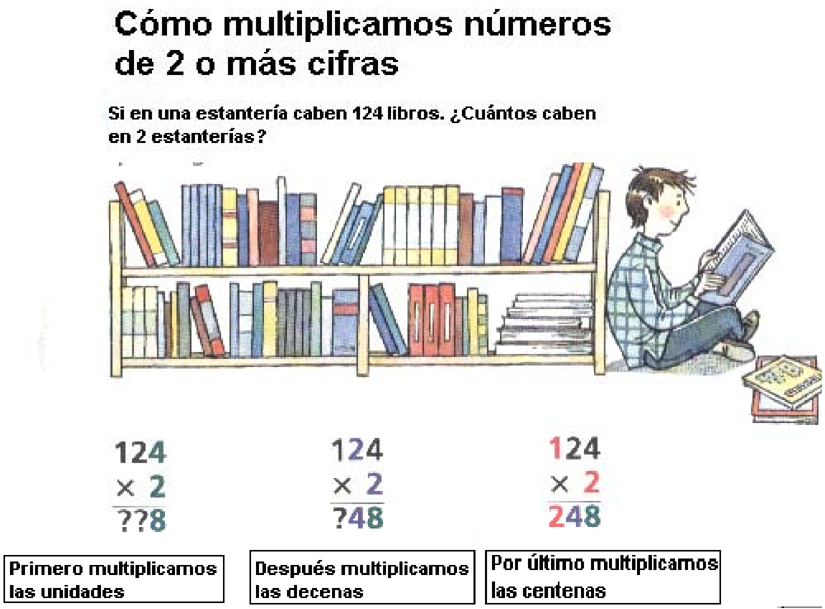
Determina el campo de validez de cada una de estas reglas.

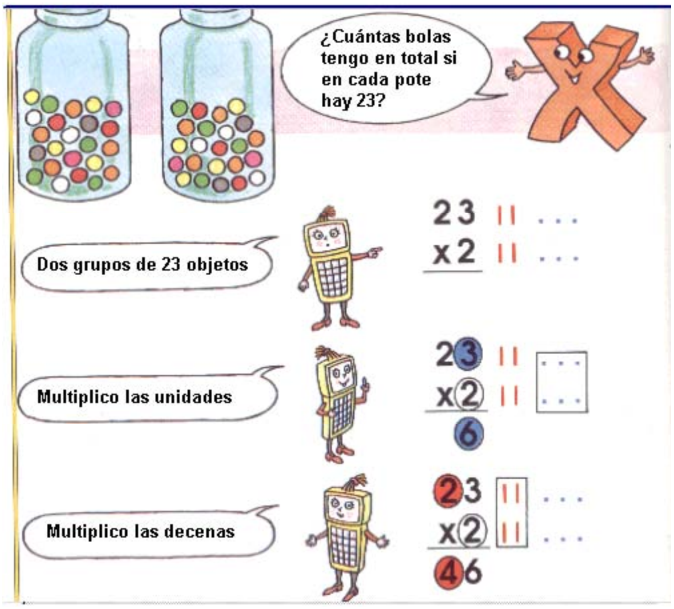
5. DISEÑO DE ACTIVIDADES

Elige un contenido matemático para un nivel determinado de primaria (números, geometría, datos). Enunciar al menos un problema para ese tema que se pueda resolver usando las técnicas: buscar un patrón, hacer un dibujo o diagrama, y construir una tabla.

6. ANÁLISIS DE TEXTOS

A continuación tienes dos explicaciones que tienen por objetivo introducir la multiplicación en 3º de primaria. Compáralas y di cuál crees que es la que potencialmente es más significativa. Justifica tu respuesta.





ANEXO 2.1:

ESTANDARES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS (NCTM, 1991)

ESTÁNDAR 1: *TAREAS MATEMÁTICAS VALIOSAS*

El profesor de matemáticas debería plantear tareas que estén basadas en:

* unas matemáticas significativas y razonables;

* el conocimiento de los intereses, experiencias y comprensión de los estudiantes;

* el conocimiento de los distintos modos en que aprenden los alumnos: y que

  * comprometa el intelecto de los estudiantes;

  * desarrolle la comprensión y destrezas matemáticas de los estudiantes;

  * estimule a los estudiantes a hacer conexiones y a desarrollar un marco coherente para las ideas matemáticas;

  * exija la formulación y resolución de problemas y el razonamiento matemático;

  * promueva la comunicación sobre las matemáticas;

  * presente las matemáticas como una actividad humana en desarrollo;

  * muestre sensibilidad y tenga en cuenta las diversas disposiciones y experiencias previas de los estudiantes;

  * promueva el desarrollo de las disposiciones para hacer matemáticas de los estudiantes.

ESTÁNDAR 2: *EL PAPEL DEL PROFESOR EN EL DISCURSO*

El profesor de matemáticas debería organizar el discurso mediante

* el planteamiento de cuestiones y tareas que pongan de manifiesto, comprometan y desafíen el pensamiento de cada estudiante;

* escuchar cuidadosamente las ideas de los estudiantes;

* pidiendo a los estudiantes que clarifiquen y justifiquen sus ideas oralmente y por escrito;

* decidiendo cuáles ideas de las que los estudiantes afloran durante una discusión se van a tratar con detalle;

* decidiendo cuando y cómo asociar una notación y el lenguaje matemático a las ideas de los estudiantes;

* decidir cuando proporcionar una información, cuando clarificar una cuestión, cuando modelizar, cuando llevar el protagonismo, y cuando dejar al estudiante luchar contra una dificultad;

* registrar la participación de cada estudiante en las discusiones y decidir cuando y como animar a cada estudiante a participar.

ESTÁNDAR 3: *EL PAPEL DEL ESTUDIANTE EN EL DISCURSO*

El profesor de matemática debería promover un discurso de la clase en el que los estudiantes -

* escuchen, respondan y pregunten al profesor y unos a otros;

* usen una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos;

* plantear problemas y cuestiones;

* hacer conjeturas y presentar soluciones;

* explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar;

* tratar de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de representaciones particulares, soluciones, conjeturas y respuestas;

* apoyarse en la evidencia y los argumentos matemáticos para determinar la validez.

ESTÁNDAR 4: *INSTRUMENTOS PARA ESTIMULAR EL DISCURSO*

El profesor de matemáticas, con objeto de estimular el discurso, debería promover y aceptar el uso de -

* ordenadores, calculadoras y demás tecnología;

* materiales concretos usados como modelos;

* dibujos, diagramas, tablas y gráficas;

* términos y símbolos inventados y convencionales;

* metáforas, analogías y relatos;

* hipótesis, explicaciones y argumentos escritos;

* presentaciones orales y dramatizaciones.

ESTÁNDAR 5: *ENTORNO DE APRENDIZAJE*

El profesor de matemáticas debería crear un entorno de aprendizaje que estimule el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante:

* proporcionando y estructurando el tiempo necesario para que exploren unas matemáticas adecuadas y que intenten resolver problemas e ideas significativas;

* usando el espacio físico y los materiales de modo que faciliten el aprendizaje matemático por los estudiantes;

* proporcionando un contexto que estimule el desarrollo de las destrezas y eficiencia matemática;

* respetando y valorando las ideas de los estudiantes, modos de pensamiento y disposición hacia las matemáticas;

y mediante la animación consistente de los estudiantes para -

* trabajar independientemente y en colaboración para dar sentido a las matemáticas;

* asumir riesgos intelectuales mediante el planteamiento de cuestiones y formulando conjeturas;

* mostrar competencia matemática mediante la validación y el apoyo de ideas matemáticas con argumentos matemáticos.

ESTÁNDAR 6: *ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE*

El profesor de matemáticas debería comprometerse en el análisis progresivo de la enseñanza y el aprendizaje sabiendo –

* observar, escuchar y reunir información sobre los estudiantes para evaluar lo que están aprendiendo;

* examinar los efectos de las tareas, el discurso, y el entorno del aprendizaje sobre el conocimiento de los estudiantes, sus destrezas y actitudes;

en orden a -

* asegurar que cada estudiante está aprendiendo unas matemáticas adecuadas y significativas y que está desarrollando una disposición positiva hacia las matemáticas;

* desafiar y extender las ideas de los estudiantes;

* adaptar o cambiar las actividades durante la enseñanza;

* hacer planes, tanto a corto como a largo plazo;

* describir y comentar sobre el aprendizaje de cada estudiante con los padres, directores, así como con los propios estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor/MEC.

Brousseau, G. (1988). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor. *Suma*, 4: 5-12 y *Suma* 5: 5-12 (segunda parte).

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-59). Madrid: Síntesis.

Font, V (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17: 10-16

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.

Capítulo 3

CURRÍCULO MATEMÁTICO PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN SOBRE LAS ORIENTACIONES CURRICULARES

Consigna:

A continuación se presenta un extracto del Decreto de Currículo de Educación Primaria, para el área de Matemáticas.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.

2) ¿Cómo se contempla el aprendizaje de las matemáticas?

3) ¿Se da prioridad a unas matemáticas ligadas a la experiencia, integradoras y funcionales, y se tienen en cuenta las características personales, sociales y psicológicas del alumnado?.

4) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Las matemáticas en la Educación Primaria (Decreto de Primaria, MEC)

Las consideraciones precedentes sobre el conocimiento matemático y sobre el papel que juega en el desarrollo global de los alumnos muestran hasta qué punto las contribuciones de esta área son decisivas para alcanzar los Objetivos Generales de la Educación Primaria. En efecto, mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica, y adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, para representarla, explicarla y predecirla, en suma, para actuar en y sobre ella.

Tradicionalmente, la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria ha estado fuertemente determinada por dos tipos de reflexiones: las relativas al nivel de desarrollo intelectual y de competencia cognitiva de los alumnos y las relativas a la estructura interna del conocimiento matemático. Respecto a las segundas, se ha subrayado sobre todo que las matemáticas no son un conjunto de elementos desconectados, sino que poseen una estructura interna, con una fuerte componente jerárquica entre sus partes, que impone una determinada secuencia temporal en el aprendizaje. De este modo, la estructura interna del saber matemático se ha convertido a menudo en el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de los contenidos de aprendizaje en la Educación Primaria.

Esta manera de proceder ignora la diferencia, esencial desde el punto de vista pedagógico, entre, por una parte, las características del saber matemático en un estado avanzado de elaboración y, por otra, el proceso de construcción del conocimiento matemático. Como ya se ha mencionado, la formalización, el rigor, la coherencia, la ausencia de ambigüedad y las otras características del conocimiento matemático no son el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de construcción. Es en este sentido que la elección de la estructura interna del saber matemático como único punto de referencia para la selección, organización y secuenciación de los contenidos del aprendizaje no parece una opción adecuada, siendo necesario introducir igualmente criterios relativos a la naturaleza del propio proceso de construcción.

Algo similar cabe decir en cuanto a las consideraciones relativas al nivel de desarrollo intelectual y de competencia cognitiva de los alumnos. En la medida en que el aprendizaje de las matemáticas se entienda como la apropiación por parte de los alumnos de un saber constituido y acabado, es evidente que su capacidad para asimilar y aprehender la estructura interna de dicho saber condicionará la posibilidad misma de llevar a cabo el aprendizaje. Por el contrario, si el aprendizaje de las matemáticas se contempla, como es el caso en este Diseño Curricular Base, como un proceso de construcción y de abstracción de relaciones, progresivamente más complejas, elaboradas en y a partir de la actividad del alumno, entonces las características psicoevolutivas de los alumnos, sin dejar de jugar un papel esencial, difícilmente podrán ser consideradas como el punto de referencia único para la selección, organización y secuenciación de los contenidos del aprendizaje. En efecto, buena parte de los conceptos y procedimientos matemáticos que, por su grado de formalización, abstracción y complejidad, escapan a las posibilidades de comprensión de los alumnos hasta bien entrada la adolescencia, aparecen sin embargo de forma intuitiva y práctica en las actividades escolares y extraescolares de los alumnos de la Educación Primaria convirtiéndose, de este modo, en objeto de atención preferente de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en esta etapa educativa.

De lo dicho hasta aquí se infiere que, en la Educación Primaria, el proceso de construcción del conocimiento matemático debe utilizar como punto de partida la propia experiencia práctica de los alumnos. Las relaciones entre las propiedades de los objetos y de las situaciones que los alumnos establecen de forma intuitiva en el transcurso de sus actividades pueden convertirse en objeto de reflexión dando paso, de este modo, a las primeras experiencias específicamente matemáticas. En un primer momento, estas experiencias matemáticas serán de una naturaleza esencialmente intuitiva y estarán vinculadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación en situaciones particulares.

Conviene tener presente, sin embargo, que la experiencia práctica sólo constituye un punto de partida -en el que será preciso detenerse en ocasiones durante períodos de tiempo ciertamente dilatados-, y que la construcción del conocimiento matemático obliga a una abstracción y una formalización crecientes. Quiere esto decir que la experiencia práctica y la comprensión intuitiva de nociones, relaciones y propiedades matemáticas ha de ir enriqueciéndose progresivamente con formas de representación (por ejemplo, dibujos, esquemas y otras formas de representación gráfica) que permitan trascender la manipulación concreta de objetos y situaciones hasta llegar, en último término, a una comprensión plena de las mismas mediante el manejo adecuado de las notaciones y operaciones simbólicas de tipo numérico, algebraico o geométrico.

Son muchos los conceptos y procedimientos matemáticos cuya comprensión plena en el sentido apuntado escapa a las posibilidades intelectuales de los alumnos de la Educación Primaria. Sin embargo, esto no implica, como ya se ha dicho, que deban excluirse necesariamente como objeto de aprendizaje. Por una parte, su introducción de forma más o menos intuitiva durante esta etapa permite iniciar el largo camino que lleva desde la reflexión sobre la propia actividad hasta los niveles más abstractos, formales y deductivos del conocimiento matemático. Por otra parte, mucho antes de que sea posible alcanzar su comprensión plena, algunos de estos conceptos y procedimientos (por ejemplo, sistema de numeración decimal, estrategias de conteo, operaciones aritméticas, unidades de medida, etc.) adquieren un valor instrumental que se corresponde plenamente con las necesidades e intereses de los alumnos de la Educación Primaria.

En cualquier caso, el hecho de tomar como punto de partida para la construcción del conocimiento matemático la propia experiencia y la reflexión sobre la misma con el fin de ir avanzando, progresivamente, hacia niveles más elevados de abstracción y de formalización posee importantes implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria. Sin menoscabo del desarrollo del que son objeto en el apartado de Orientaciones Didácticas y para la Evaluación, señalemos, por ejemplo, que el planteamiento expuesto aconseja:

- conceder prioridad al trabajo práctico y oral, introduciendo únicamente las actividades descontextualizadas y el trabajo escrito (utilización de notaciones simbólicas) cuando los alumnos muestren una comprensión de los conceptos matemáticos y un interés por los mismos;
- conceder prioridad al trabajo mental (y, en especial, al cálculo mental) con el fin de profundizar los conocimientos matemáticos intuitivos antes de pasar a su formalización;
- utilizar ampliamente actividades grupales de aprendizaje que favorezcan los intercambios, la discusión y la reflexión sobre las experiencias matemáticas;
- prestar especial atención al desarrollo de estrategias personales de resolución de problemas, potenciando la inclusión en las mismas de los conocimientos matemáticos que se vayan adquiriendo (representaciones gráficas y numéricas, registro de las alternativas exploradas, simplificación del problema,..);
- utilizar los distintos ámbitos de experiencia de los alumnos, escolares (otras áreas del currículo: conocimiento del medio, actividades físicas y deportivas, actividades artísticas, etc.) y extraescolares, como fuente de experiencias matemáticas.

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

En la bibliografía encontramos diferentes interpretaciones del término *currículo*, así como diferentes formas de explicarlo y justificarlo (teorías curriculares) con las que ya estáis familiarizados por vuestros estudios de pedagogía.

En síntesis el currículo trata de establecer de manera razonada y para cada etapa educativa, qué enseñar y cómo en las distintas áreas de conocimiento. Los elementos que componen el currículum se pueden agrupar en torno a cuatro cuestiones: ¿Qué enseñar?, ¿Cuándo enseñar?, ¿Cómo enseñar?, y ¿Qué, cómo y cuándo evaluar?

En un sentido restringido el "currículo" se refiere a las directrices y documentos oficiales dirigidos a un nivel y contenido concreto. Las directrices curriculares oficiales, tanto a nivel nacional como de las comunidades autonómicas, establecen los fines generales de la educación matemática, los objetivos, contenidos y criterios de evaluación, pero a un nivel de generalidad que debe ser posteriormente desarrollado por los centros, seminarios y los propios profesores. Estos deberán tener una preparación adecuada para realizar la labor de desarrollo e implementación curricular.

En sentido amplio el currículo comprendería también el detalle de las acciones educativas específicas que se deben realizar en el aula para el logro de los objetivos, esto es, el plan operativo que detalla qué matemáticas necesitan conocer los alumnos, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus conocimientos matemáticos y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El currículum se concreta en tres niveles: el primer nivel es el marco común elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia, que se completa con las aportaciones de la Comunidad Autónoma. El segundo nivel lo establece el equipo docente de cada centro marcando los objetivos básicos, la organización y coordinación de recursos. El tercer nivel está formado por las *programaciones de aula* con todos los elementos que esto conlleva.

En los capítulos 1 y 2 hemos descrito nuestros supuestos epistemológicos sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. De ellos se derivan los siguientes supuestos pedagógicos sobre la elaboración de propuestas curriculares para la educación matemática:

1. El fin primordial del profesor en el aula es ayudar a sus alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, su capacidad de formular y resolver problemas, de comunicar sus ideas matemáticas y relacionar las diferentes partes de las matemáticas entre sí y con las restantes disciplinas. Finalmente debe promover unas buenas actitudes en los alumnos hacia las matemáticas.
2. El profesor debe prestar una atención especial a la organización de la enseñanza y el aprendizaje: lo que los alumnos aprenden depende fundamentalmente de cómo se lleva a cabo este aprendizaje. Debe realizar una cuidadosa selección de las tareas y situaciones didácticas que proporcionen oportunidades a los alumnos de indagar problemas significativos para ellos y relevantes desde el punto de vista matemático,

formular hipótesis y conjeturas, utilizar diversos tipos de representaciones; validar sus soluciones y comunicarlas a otros, dentro de un clima cooperativo y científico.

3. Hay que llevar al alumno progresivamente a la construcción de una red de conceptos y procedimientos, y al dominio del lenguaje matemático, en consonancia con el conocimiento matemático objetivo. Con dicho fin se deben diseñar situaciones específicas de institucionalización de los conocimientos pretendidos.
4. El currículo debe ser flexible y adaptado a los distintos alumnos. Todos los niños deben alcanzar los objetivos de aprender a realizar conjeturas y argumentos, formular y resolver problemas. Para ello se deben proponer tareas sencillas sobre las que toda la clase puede trabajar, pero, además, se deben proporcionar actividades de desarrollo y sugerencias para los alumnos más capacitados.
5. La observación continuada de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe ser la principal estrategia evaluadora de los mismos.

1. Compara el nivel de concreción que presentan los siguientes documentos para el bloque de contenidos "Números y operaciones": 1) El DCB, 2) El Proyecto curricular de una escuela que puedas conseguir, y 3) Un libro de texto de matemáticas de primaria.

2. ¿Por qué el currículo realmente implementado en el aula puede ser diferente del currículo oficial, contenido en las directrices curriculares e incluso diferente del currículo planificado por el mismo profesor? ¿Qué motivos pueden llevar al profesor a cambiar lo planificado?

El currículo matemático escolar tiene una fuerte incidencia sobre lo que los estudiantes tienen oportunidad de aprender y de lo que aprenden efectivamente:

- En un currículo coherente, las ideas matemáticas se presentan y vinculan de forma que permite progresar al conocimiento de los estudiantes y su capacidad de aplicar las matemáticas.
- Un currículo matemático efectivo se centra en las partes más importantes de las matemáticas –las que preparan a los estudiantes para sus estudios futuros y para resolver problemas en una variedad de situaciones, en la vida diaria y en el trabajo.
- Un currículo matemático bien articulado desafía a los estudiantes para que aprendan ideas matemáticas cada vez más sofisticadas a medida que continúan en sus estudios.

La Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), determina, en su artículo cuarto, los elementos integrantes del currículo: los objetivos, contenidos, métodos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades en los que se organiza la práctica educativa. Dispone también que corresponde al Gobierno fijar los aspectos básicos del currículo o enseñanzas mínimas para todo el Estado, mientras es competencia de las Administraciones Educativas establecer el currículo con mayor detalle. En el Real Decreto 1006/1991, de 14 de junio (BOE 26-6-1991), el MEC establece los mencionados aspectos básicos del currículo de matemáticas de Educación Primaria.

En este capítulo presentamos las principales características del currículo oficial de matemáticas para la educación primaria en España, junto con las orientaciones curriculares elaboradas en EE.UU por el National Council of Teachers of Matemáticas

(Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares; NCTM 2000). Esto permitirá a los maestros en formación tener elementos de comparación y disponer de criterios para hacer una interpretación crítica y constructiva de las orientaciones curriculares.

2. FINES Y OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2.1. ¿Por qué y para qué enseñar matemáticas?

En este apartado analizaremos las siguientes razones ofrecidas en los documentos curriculares para apoyar la enseñanza de las matemáticas:

- La matemática es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir competencias numéricas, geométricas, estadísticas y de medida suficientes para desenvolverse en su vida diaria, así como para leer e interpretar información matemática que aparece en los medios de información.
- Es útil para la vida posterior, ya que en todas las profesiones se precisan unos conocimientos de diverso nivel de sofisticación sobre las matemáticas.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, que con frecuencia se apoyan en cálculos, conceptos o razonamientos matemáticos.

3. Analiza las ideas matemáticas que aparecen en un ejemplar del diario local o nacional. ¿Piensas que algún adulto puede tener dificultad en interpretar algunas de estas ideas? ¿Cómo puede influir una interpretación incorrecta de ideas o información matemática en las siguientes situaciones: elaboración de un presupuesto, lectura de un contrato de trabajo, elaboración del plano de una vivienda?

4. Analiza la presencia de contenidos matemáticos en otras áreas curriculares, tales como geografía, ciencias sociales, dibujo, etc.

2.2. Justificación y orientación del currículo básico del MEC

El Diseño Curricular Base (MEC, 1989) reconoce que las matemáticas constituyen hoy un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, cálculo, medida y estimación, útiles para establecer relaciones espaciales, cuantitativas y de otros tipos entre diferentes aspectos de la realidad. A semejanza de otras disciplinas, constituyen un campo en continua expansión y de creciente complejidad, lo que tiene también consecuencias sobre la educación en matemáticas, que si bien ha estado presente tradicionalmente en la enseñanza, puede y merece ser enseñada con procedimientos distintos de los tradicionales. La misma introducción y aplicación de nuevos medios tecnológicos en matemáticas obliga a un planteamiento diferente tanto en los contenidos como en la forma de su enseñanza.

El currículo debe reflejar el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad.

La constante referencia a la realidad que se encierra en la actividad matemática no ha de hacer olvidar, por otro lado, los elementos por los que las matemáticas precisamente se distancian de la misma, mediante la creatividad, la crítica, el poder de imaginar y representar no sólo espacios físicos reales, sino, con generalidad mayor, una "realidad" alternativa. La exploración y desarrollo de modelos "puramente" matemáticos contribuyen a describir, comprender y explicar mejor la complejidad del mundo.

La enseñanza de las matemáticas se justifica también por objetivos de desarrollo intelectual general: se destaca que las matemáticas contribuyen al desarrollo de capacidades cognitivas abstractas y formales, de razonamiento, abstracción, deducción, reflexión y análisis.

Hay que destacar también el valor funcional que poseen como conjunto de procedimientos para resolver problemas en muy diferentes campos, para poner de relieve aspectos y relaciones de la realidad no directamente observables y para predecir hechos, situaciones o resultados antes de que se produzcan o se observen empíricamente. Ambos aspectos, el funcional y el formativo, son indisociables y complementarios, no antagónicos.

Por otro lado, en la sociedad actual es imprescindible manejar conceptos matemáticos relacionados con la vida diaria, en el ámbito del consumo, la economía privada y otras situaciones de la vida social. A medida que los alumnos progresan a través de los ciclos de la educación obligatoria, se precisan unas matemáticas más complejas, tanto en las ciencias de la naturaleza como en las ciencias sociales. Por ello, su aprendizaje ha de llevar a la capacidad de utilizar el lenguaje matemático en la elaboración y comunicación de conocimientos.

Así pues, a lo largo de la educación obligatoria las matemáticas han de desempeñar, un papel formativo básico de capacidades intelectuales, un papel aplicado a problemas y situaciones de la vida diaria, y un papel instrumental para adquirir conocimientos en otras materias.

Todo ello justifica los contenidos de las matemáticas en esta etapa, así como las características didácticas básicas de su enseñanza, así como los siguientes principios de selección y organización de sus contenidos. Estos principios no se aplican por igual desde el comienzo de la Educación Primaria al final de la Educación Secundaria, pero mantienen su vigencia a lo largo de la educación obligatoria:

1. Las matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. En esa presentación han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. En el aprendizaje de los propios alumnos hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción.

2. Es necesario relacionar los contenidos de matemáticas con la experiencia de alumnos y alumnas, y presentarlos en un contexto de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista en esta resolución. En relación con ello, hay que presentar las matemáticas como conocimiento que sirve para almacenar una

información de otro modo inasimilable, para proponer modelos que permiten comprender procesos complejos del mundo natural y social y para resolver problemas muy diferentes, gracias a la posibilidad de abstracción, simbolización y formalización propia de las matemáticas.

3. La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha de atender equilibradamente a: *a*) al establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, que potencian las capacidades cognitivas de los alumnos; *b*) a su aplicación funcional, posibilitando que los alumnos valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana; *c*) a su valor instrumental, creciente a medida que el alumno progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que las matemáticas proporcionan formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, al conocimiento científico.

En la educación Primaria los diferentes aspectos (formativo, funcional, instrumental) son muy importantes, ya que, debido a su abstracción, formalización y complejidad, gran parte de los conceptos y procedimientos matemáticos escapan a las posibilidades de comprensión de alumnos y alumnas. Por ello, en esta etapa, a semejanza de lo que debe hacerse con otras áreas, el punto de partida del proceso de construcción del conocimiento matemático ha de ser la experiencia práctica y cotidiana que niños y niñas poseen. Las relaciones entre las propiedades de los objetos y de las situaciones que alumnos y alumnas establecen de forma intuitiva y espontánea en el curso de sus actividades diarias han de convertirse en objeto de reflexión, dando paso de ese modo a las primeras experiencias propiamente matemáticas. Se trata de experiencias sencillas y cotidianas tales como la organización del espacio y la orientación dentro de él (en casa, en el colegio, en la vecindad), los ciclos y rutinas temporales (días de la semana, horas de comer, etc.), las operaciones de medición que realizan los adultos (contando, pesando, etc.), el uso del dinero en las compras cotidianas o la clasificación de objetos de acuerdo con determinadas propiedades.

La orientación de la enseñanza y del aprendizaje en esta etapa se sitúa a lo largo de un continuo que va de lo estrictamente manipulativo, práctico y concreto hasta lo esencialmente simbólico, abstracto y formal. Las experiencias matemáticas iniciales serán de naturaleza esencialmente intuitiva y estarán vinculadas a la manipulación de objetos concretos y a la actuación en situaciones particulares. Aunque podemos detenernos durante períodos de tiempo dilatados, estas experiencias iniciales son sólo un punto de partida que hay que abandonar en algún momento, para construir el conocimiento matemático a través de una abstracción y formalización crecientes, y corregir los errores, distorsiones e insuficiencias de la intuición espontánea. Sin necesidad de alcanzar la comprensión plena de algunos conceptos y procedimientos matemáticos, éstos pueden cumplir sus funciones instrumentales en un nivel que se corresponde con las necesidades y capacidades de los alumnos de Primaria.

Es importante que los alumnos tengan dominio funcional de estrategias básicas de cómputo, de cálculo mental, de estimaciones de resultados y de medidas, así como también de utilización de la calculadora, sin necesidad de conocer sus fundamentos matemáticos. Junto con ello, los alumnos y alumnas tendrán que adquirir una actitud positiva hacia las matemáticas, para valorar y comprender la utilidad del conocimiento matemático, interesarse por su uso, el modo en que permite ordenar la información, comprender la realidad y resolver determinados problemas.

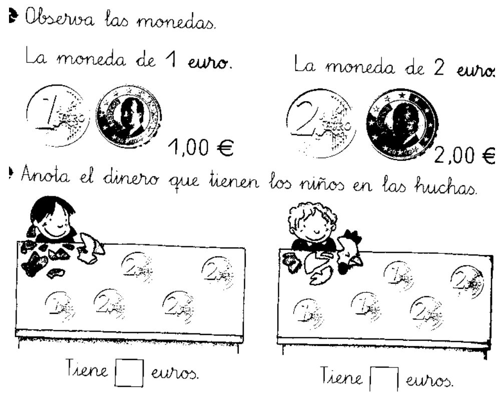
5. Analiza la siguiente actividad de un texto de primer curso de primaria.

¿Qué contenidos se tratan?

¿Cómo se relacionan con la experiencia del alumno?

¿Qué tipo de conocimiento puede adquirir el alumno?

¿Cómo se podría hacer progresar hacia un conocimiento más formal?



Objetivos generales

Una vez establecidas las motivaciones anteriores, el Decreto curricular indica que la enseñanza de las matemáticas en la etapa de Educación Primaria tendrá como objetivo contribuir a desarrollar en los alumnos y alumnas las capacidades de:

1. Utilizar el conocimiento matemático para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes sobre fenómenos conocidos.
2. Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requieran operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante formas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes.
3. Utilizar instrumentos sencillos de cálculo y medida decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
4. Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario.
5. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno.
6. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.
7. Apreciar el papel de las matemáticas en la vida cotidiana, disfrutar con su uso y reconocer el valor de actitudes como la exploración de distintas alternativas, la conveniencia de la precisión o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Identificar en la vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión y resolución de dichos problemas.

6. Indica dos situaciones de la vida cotidiana del niño en que aparezca problemas aritméticos, otras dos en que se requiera la orientación espacial y otras dos en que aparezcan problemas de estimación o medida.

7. Identifica en un libro de matemáticas de educación primaria una actividad relacionada con cada uno de los objetivos anteriores.

2.3. Principios para las matemáticas escolares propuestos por el NCTM

A continuación presentaremos una síntesis de la última edición de las orientaciones curriculares elaboradas por la prestigiosa organización de profesores de matemáticas de Estados Unidos, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que se conocen con el nombre de "*Principios y Estándares para la Matemática Escolar*" (*Principios y Estándares 2000*). El proceso riguroso y sistemático aplicado en su desarrollo han permitido elaborar unas guías curriculares que suponen un claro progreso con relación a las orientaciones curriculares elaboradas en nuestro país a principios de los noventa, tanto para todo el estado español como en las distintas comunidades autónomas.

Los Principios y Estándares proporcionan una guía y una perspectiva general, esto es, se trata de un "Diseño curricular base", y deja, por tanto, las decisiones curriculares específicas a los niveles locales de decisión (Proyectos de Centro, y Programaciones de Aula). Consideramos que es un documento de gran ayuda que nos permite contrastar y valorar los diseños curriculares propuestos en España a nivel nacional y regional para el área de matemáticas. Además, ofrecen una visión de las matemáticas y su enseñanza, y unos recursos educativos, que en líneas generales son coherentes con el enfoque epistemológico, cognitivo e instruccional que hemos descrito en los capítulos anteriores.

El documento "Principios y Estándares para la Matemática Escolar" está disponible en Internet en versión electrónica, junto con otros recursos complementarios para la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación infantil hasta el bachillerato para su difusión internacional.

8. Explora la página de Internet dedicada a los Principios y Estándares para la matemática escolar: http://standards.nctm.org/

¿Qué tipo de recursos se recogen? ¿Cómo pueden estos recursos ser útiles a un profesor?

Los Principios y Estándares para la Matemática Escolar pretenden ser un recurso y una guía para todas las personas que toman decisiones que afectan a la educación matemática de los estudiantes de los niveles desde infantil hasta el bachillerato (grados K-12, en terminología de EE.UU.). Las recomendaciones enfatizan la importancia de la comprensión y se describen modos de cómo pueden lograrla los estudiantes. Han sido elaborados por diversos grupos de trabajo formados por profesores de matemáticas y especialistas en educación matemática durante un período de unos tres años, partiendo de la información y experiencia aportada por documentos similares elaborados en ediciones anteriores (Estándares Curriculares; Estándares Profesionales para la Enseñanza de las Matemáticas; Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares)

- Los *Principios* son enunciados que reflejan preceptos básicos que son fundamentales para el logro de una educación matemática de calidad; deberían ser útiles como perspectivas sobre las que los educadores pueden basar sus decisiones que afectan a las matemáticas escolares.

- Los *Estándares* describen el contenido matemático y los procesos que los estudiantes deberían aprender.

Los *Principios* y los *Estándares* conjuntamente constituyen guías para los educadores en su esfuerzo por una mejora continua de la educación matemática en las clases, las escuelas y el sistema educativo. A continuación describimos los seis principios recogidos en el documento

Principios para las Matemáticas Escolares

- **Equidad**. La educación matemática de calidad ha de basarse en la equidad – unas altas expectativas y apoyo para todos los estudiantes, según sus características.
- **Currículo**. Un currículo es más que una colección de actividades: debe ser coherente, centrado en unas matemáticas importantes y bien articuladas a lo largo de los distintos niveles.
- **Enseñanza**. Una enseñanza efectiva de las matemáticas requiere que los estudiantes comprendan lo que conocen y lo que necesitan aprender, y por tanto se plantea el desafío de apoyarles en un aprendizaje correcto.
- **Aprendizaje**. Los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento a partir de la experiencia y el conocimiento previo.
- **Evaluación**. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de unas matemáticas relevantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.
- **Tecnología**. La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y estimula el aprendizaje de los estudiantes.

Estos seis principios no se refieren a contenidos o procesos matemáticos específicos, mientras que los Estándares sí se refieren a dichos contenidos y procesos. Los principios describen cuestiones cruciales que, aunque no sean específicas de las matemáticas escolares, están profundamente interconectadas con los programas de matemáticas. Pueden influir en el desarrollo de marcos curriculares, la selección de materiales curriculares, la planificación de unidades o lecciones instruccionales, el diseño de evaluaciones, la asignación de los profesores y los estudiantes a las clases, las decisiones instruccionales en las clases, y el establecimiento de programas de apoyo para el desarrollo profesional de los profesores.

9. ¿Cómo pueden producirse problemas de falta de equidad en la clase de matemáticas? ¿Cómo pueden los libros de texto u otros materiales no respetar el principio de equidad?

10. Pon ejemplos de la forma en la que la calculadora puede afectar a la clase de matemáticas. ¿Qué otros recursos tecnológicos podrían afectar a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

3. CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN PRIMARIA

3.1 Diferentes tipos de contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes

En el Capítulo 1 de esta Monografía ya se ha comentado que el Diseño Curricular Base está organizado teniendo en cuenta tres tipos de contenidos: conceptos, procedimientos y actitudes. En los bloques de estas orientaciones se señalan en tres apartados distintos los tres tipos de contenido. El primero de ellos es el que presenta los conceptos, hechos y principios. El segundo tipo de contenido es el que se refiere a los procedimientos. Este tipo de contenido, si bien estaban presentes en los currículos anteriores, quedaban relegados a un segundo plano. En el DCB los procedimientos pasan a un primer plano y además éstos no se restringen a los algoritmos ya que se contemplan procedimientos generales como por ejemplo el cálculo mental o la resolución de problemas. La novedad más importante es la incorporación en el currículo contenidos de actitudes, valores y normas con el objetivo de que el alumno tenga una actitud positiva que le permita perseverar en el esfuerzo necesario para la construcción de los nuevos contenidos que se le proponen en el proceso de estudio.

3.2. Bloques de contenidos en el currículo básico del MEC y su estructuración

El Currículo del MEC se organiza en cuatro bloques de contenidos, diferenciando en ellos conceptos, procedimientos y actitudes. A continuación los reproducimos.

1. Números y operaciones

Conceptos

1. Números naturales, fraccionarios y decimales:
2. Sistema de Numeración Decimal:
3. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división:
4. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.
2. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.
3. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
4. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
5. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.

2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.
3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

11. ¿Qué puede hacer el maestro en la clase de matemáticas para aumentar la curiosidad de sus alumnos? ¿para reforzar la confianza en su propia capacidad para hacer matemáticas? ¿para motivarlos a una presentación clara y ordenada de las soluciones a las tareas propuestas?

12. Da una lista de estrategias sencillas de cálculo mental que puedan ser útiles a los alumnos que finalizan la educación primaria en situaciones cotidianas, tales como ir a hacer la compra.

13. Razona cómo la implantación del Euro ha influido en la creación de nuevas necesidades de aprendizaje, en lo que se refiere a conceptos numéricos.

2. La medida

Conceptos

1. Necesidad y funciones de la medición:
2. Unidades no convencionales.
3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal: (longitud, superficie, capacidad, masa).
4. Las unidades de medida de tiempo.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.
2. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones cotidianas.
3. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.
4. Expresión verbal del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Actitudes

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.
2. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.
3. Curiosidad e interés por averiguar la medida de algunos objetos y tiempos familiares.
4. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

14. Analiza la progresión del aprendizaje de las unidades de medida de tiempo en la enseñanza primaria en una colección de libros de texto. ¿Piensas que tienen en cuenta los contenidos actitudinales?

3. Formas geométricas y situación en el espacio

Conceptos

1. La situación en el espacio (distancias, ángulos y giros, y sistema de coordenadas cartesianas)
2. Relación entre elementos geométricos (paralelismo, perpendicularidad)
3. La representación elemental del espacio (planos, mapas, maquetas)
4. Formas planas y espaciales
5. Regularidades y simetrías.

Procedimientos

1. Descripción de la situación y posición de un objeto en el espacio con relación a uno mismo y/o a otros puntos de referencia apropiados.
2. Interpretación y descripción verbal de croquis, planos, maquetas y mapas.
3. Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
4. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
5. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.

Actitudes

1. Valoración de la utilidad de los sistemas de referencia y de la representación espacial en actividades cotidianas.
2. Sensibilidad y gusto por la elaboración y por la presentación cuidadosa de las construcciones geométricas.
3. Precisión y cuidado en el uso de instrumentos de dibujo y disposición favorable para la búsqueda de instrumentos alternativos.
4. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio.

4. Organización de la información

Conceptos

1. La representación gráfica:
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficas estadísticas: bloques de barras, pictogramas, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Procedimientos

1. Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficas sencillas relativas a fenómenos familiares.
2. Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
3. Elaboración de gráficas estadísticas con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.
4. Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso.

Actitudes

1. Actitud crítica ante las informaciones y mensajes transmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
2. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
3. Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

15. Analiza los conceptos y procedimientos implicados en la resolución de la siguiente tarea. ¿Se recogen todas las indicadas en el Decreto de Educación Primaria? Completa la tarea para que se recojan todos ellos.

Ejercicio. Al medir la altura en cm. que pueden saltar un grupo de escolares, antes y después de haber efectuado un cierto entrenamiento deportivo, se obtuvieron los valores siguientes. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo?

Altura saltada en cm.

Alumno	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Gema	Hilda	Ines	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

3.3. Estándares de contenidos y procesos del NCTM

Los Estándares constituyen un fundamento global recomendado para todos los estudiantes. Se formulan estándares para cinco bloques de contenido matemático y cinco tipos de procesos matemáticos. Los bloques de contenido son: Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medición, Análisis de Datos y Probabilidad, mientras que los tipos de procesos matemáticos se refieren a: Resolución de Problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representaciones.

Cada uno de estos diez Estándares se aplican en todos los niveles, desde educación infantil a bachillerato y proponen las matemáticas que todos los estudiantes deberían tener oportunidad de aprender. Cada Estándar comprende un pequeño número de objetivos que se aplican a todos los niveles – un núcleo común que promueve un foco en el crecimiento del conocimiento de los estudiantes a medida que progresan en el currículo. En cada tramo de niveles se formulan un conjunto adicional de expectativas específicas sobre los estándares de contenido. No se espera que cada tópico sea tratado todos los años ni que los distintos contenidos se traten de manera separada unos de otros. Las distintas áreas se solapan y están integradas. Los procesos se pueden aprender dentro de los contenidos, y los contenidos se puede aprender dentro de los procesos.

Ejemplos

> Los números penetran en todas las áreas de matemáticas. Algunos temas sobre análisis de datos se pueden caracterizar como parte de la medición. Los patrones y funciones aparecen en geometría. Los procesos de razonamiento, prueba, resolución de problemas y representación se usan en todas las áreas de contenido.

La disposición del currículo en estos Estándares se propone como una organización coherente del contenido y los procesos matemáticos. Las personas que diseñen marcos curriculares específicos, evaluaciones, materiales instruccionales, programaciones de aula basados en los *Principios y Estándares* necesitarán tomar sus propias decisiones sobre el orden y el énfasis en los distintos contenidos y procesos.

Los objetivos generales incluidos en las tablas 3.1 y 3.2 se concretan en objetivos más específicos (expectativas) según los siguientes tramos de niveles o grados en que se divide el sistema educativo en EE.UU: Preescolar a 2º Grado (edades 5 a 7 años); Grados 3 a 5 (8-10 años); Grados 6 a 8 (11-13 años) y Grados 9 a 12 (14-17 años). El tramo de edades de los niveles intermedios, Grados 6 a 8, incluye el 6º Nivel, que para nosotros corresponde a la Educación Primaria.

Tabla 3.1: Estándares de contenidos matemáticos para los niveles de educación infantil a bachillerato

Contenidos y procesos	*Los programas instruccionales deberían capacitar a los estudiantes para:*
Números y operaciones	• comprender los números, los modos de representar los números, relaciones entre los números, y los sistemas numéricos; • comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras; • calcular eficazmente y hacer estimaciones razonables.
Álgebra	• comprender patrones, relaciones y funciones; • representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; • usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; • analizar el cambio en diversos contextos.
Geometría	• analizar las características y propiedades de las formas geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas; • especificar posiciones y describir relaciones espaciales usando geometría de coordenadas y otros sistemas de representación; • aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas; • usar la visualización, el razonamiento espacial, y la modelización geométrica para resolver problemas.
Medición	• comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas, y procesos de medición;

	• aplicar técnicas apropiadas, herramientas, y fórmulas para determinar mediciones.
Análisis de Datos y Probabilidad	• formular cuestiones que se puedan plantear sobre datos y recoger, organizar, y presentar datos relevantes para responderlos; • seleccionar y usar métodos estadísticos apropiados para analizar datos; • desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en los datos; • comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad.

Tabla 3.2: Estándares sobre procesos matemáticos para los niveles de educación infantil a bachillerato

Contenidos y procesos	*Los programas instruccionales deberían capacitar a los estudiantes para:*
Resolución de Problemas	• construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; • resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; • aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; • controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
Razonamiento y Prueba	• reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; • hacer e investigar conjeturas matemáticas; • desarrollar y evaluar argumentos y pruebas; • seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de prueba.
Comunicaciones	• organizar y consolidar su pensamiento matemático mediante la comunicación; • comunicar su pensamiento matemático de manera coherente y clara a los compañeros, profesores y a otras personas; • analizar y evaluar el pensamiento matemático y las estrategias de los demás; • usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas de manera precisa.
Conexiones	• reconocer y usar conexiones entre las ideas matemáticas; • comprender cómo se relacionan las ideas matemáticas y se organizan en un todo coherente. • reconocer y aplicar las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.
Representaciones	• crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; • seleccionar, aplicar, y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; • usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos

16. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto de los contenidos matemáticos para los niveles de primaria:

- Currículo básico del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

4. ORIENTACIONES SOBRE LA EVALUACIÓN

4.1. Fines y tipos de evaluación. Principios básicos

La evaluación es el proceso de recogida y análisis de información que permite conocer hasta qué punto se está produciendo un buen proceso de enseñanza y aprendizaje y qué problemas se están planteando en este proceso. La información resultante proporciona al profesor elementos para analizar críticamente su intervención educativa, detectar necesidades y tomar decisiones al respecto. En la evaluación, como seguimiento continuo del proceso de enseñanza y aprendizaje cabe distinguir tres momentos o aspectos complementarios:

- *Evaluación inicial*: aporta información sobre la situación de cada alumno al iniciar un determinado proceso de enseñanza y aprendizaje que permite adecuar este proceso a sus posibilidades. Desde la perspectiva del aprendizaje significativo, esta evaluación se convierte en una tarea prioritaria para conocer los conocimientos previos de los alumnos.
- *Evaluación formativa o continua*: pone énfasis en el proceso de enseñanza y aprendizaje entendido como un continuo. Es una evaluación con carácter regulador, de orientación y autocorrectora del proceso educativo, al proporcionar información constante sobre si este proceso se adapta a las necesidades o posibilidades del sujeto, permitiendo la modificación de aquellos aspectos que resulten poco funcionales.
- *Evaluación sumativa*: proporciona información sobre el grado de consecución de los objetivos propuestos, referidos a cada alumno y al proceso formativo. Esta evaluación toma datos de la formativa y añade a éstos otros obtenidos de forma más puntual.

La evaluación se considera hoy día una parte importante del proceso de instrucción. Se concibe la evaluación como un proceso dinámico y continuo de producción de información sobre el progreso de los alumnos hacia los objetivos de aprendizaje. El principal propósito es mejorar el aprendizaje de los alumnos. Otros fines secundarios de la evaluación son:

- Proporcionar a los alumnos información individual sobre qué han aprendido y en qué puntos tienen dificultades.
- Proporcionar información al profesor, a los padres y al centro escolar sobre el progreso y la comprensión de sus alumnos, en general y sobre las dificultades de estudiantes particulares
- Proporcionar a las autoridades educativas o a cualquier agente educativo un indicador global del éxito conseguido en los objetivos educativos.

Cuando la evaluación es una parte integral de la instrucción matemática, contribuye de manera significativa al aprendizaje matemático de todos los estudiantes. *“La evaluación debería apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil a los profesores y a los estudiantes”* (NCTM 2000, Principio de Evaluación)

La evaluación debería ser más que un test al final de la instrucción para ver cómo se comportan los estudiantes bajo condiciones especiales; en su lugar, debería ser una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores en la toma de decisiones.

Además, la evaluación no debería hacerse sólo *a* los estudiantes; se debe realizar *para* los estudiantes, para guiar y estimular su aprendizaje. Los Estándares de Evaluación de las Matemáticas Escolares (NCTM, 1995) proponen que una evaluación ejemplar de las matemáticas debería,

- reflejar las matemáticas que los estudiantes deberían conocer y lo que deberían ser capaces de hacer;
- estimular el aprendizaje de las matemáticas;
- promover la equidad;
- ser un proceso abierto;
- promover inferencias válidas;
- ser un proceso coherente.

En los siguientes apartados incluimos las orientaciones sobre la evaluación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contenidas en el currículo básico del MEC y los Estándares sobre Evaluación del NCTM.

4.2. La evaluación en el currículo básico del MEC

En el DCB se contemplan los siguientes criterios:

1. En un contexto de resolución de problemas sencillos, anticipar una solución razonable y buscar los procedimientos matemáticos más adecuados para abordar el proceso de resolución.

Este criterio está dirigido especialmente a comprobar la capacidad del alumno o la alumna en la resolución de problemas, atendiendo al proceso que ha seguido. Se trata de verificar que el alumnado trata de resolver un problema de forma lógica y reflexiva.

2. Resolver problemas sencillos del entorno aplicando las cuatro operaciones con números naturales y utilizando estrategias personales de resolución.

Con este criterio se pretende evaluar que el alumnado sabe seleccionar y aplicar debidamente las operaciones de cálculo en situaciones reales. Se deberá atender a que sean capaces de transferir los aprendizajes sobre los problemas propuestos en el aula a situaciones fuera de ella.

3. Leer, escribir y ordenar números naturales y decimales, interpretando el valor de cada una de sus cifras (hasta las centésimas), y realizar operaciones sencillas con estos números.

Con este criterio se pretende comprobar que el alumnado maneja los números naturales y decimales; igualmente, se trata de ver que sabe operar con estos números y que, en situaciones de la vida cotidiana, interpreta su valor.

4. Realizar cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos (algoritmos, uso de la calculadora, cálculo mental y tanteo) utilizando el conocimiento sobre el sistema de numeración decimal

Este criterio trata de comprobar que los alumnos y las alumnas conocen las relaciones existentes en el sistema de numeración y que realizan cálculos numéricos eligiendo alguno de los diferentes procedimientos. Igualmente, se pretende detectar que saben usar la calculadora de cuatro operaciones.

5. Realizar estimaciones y mediciones escogiendo entre las unidades e instrumentos de medida más usuales, los que se ajusten mejor al tamaño y naturaleza del objeto a medir

Con este criterio se trata de que alumnos y alumnas demuestren su conocimiento sobre las unidades más usuales del SMD y sobre los instrumentos de medida más comunes. También se pretende detectar si saben escoger los más pertinentes en cada caso y si saben estimar la medida de magnitudes de longitud, superficie, capacidad, masa y tiempo. En cuanto a las estimaciones, se pretende que hagan previsiones razonables.

6. Expresar con precisión medidas de longitud, superficie, masa, capacidad y tiempo utilizando los múltiplos y submúltiplos usuales y convirtiendo unas unidades en otras cuando sea necesario

Con este criterio se pretende detectar que alumnos y alumnas saben utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, que saben convertir unas unidades en otras (de la misma magnitud), y que los resultados de las mediciones que realizan los expresan en las unidades de medida más adecuadas y utilizadas.

7. Realizar e interpretar una representación espacial (croquis de un itinerario, plano, maqueta) tomando como referencia elementos familiares y estableciendo relaciones entre ellos

Este criterio pretende evaluar el desarrollo de las capacidades espaciales topológicas en relación con puntos de referencia, distancias, desplazamientos y ejes de coordenadas. La evaluación deberá llevarse a cabo mediante representaciones de espacios conocidos o mediante juegos.

8. Reconocer y describir formas y cuerpos geométricos del entorno próximo, clasificarlos y dar razones del modo de clasificación

Este criterio pretende comprobar que el alumno o la alumna conoce algunas propiedades básicas de los cuerpos y formas geométricas, que elige alguna de esas propiedades para clasificarlos y que explica y justifica la elección.

9. Utilizar las nociones geométricas de simetría, paralelismo, perpendicularidad, perímetro y superficie para describir y comprender situaciones de la vida cotidiana.

En este criterio es importante detectar que los alumnos han aprendido estas nociones y saben utilizar los términos correspondientes para dar y pedir información.

10. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato

Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna es capaz de recoger y registrar una información que se pueda cuantificar, que sabe utilizar algunos recursos sencillos de representación gráfica, tablas de datos, bloques de barras, diagramas lineales, etc., y que entiende y comunica la información así expresada.

11. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos y comprobar dicho resultado

Se trata de comprobar que los alumnos empiezan a constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición. Estas nociones estarán basadas en su experiencia.

12. Expresar de forma ordenada y clara los datos y las operaciones realizadas en la resolución de problemas sencillos

Este criterio trata de comprobar que el alumno o la alumna comprende la importancia que el orden y la claridad tienen en la presentación de los datos de un problema para la búsqueda de una buena solución, para detectar los posibles errores y para explicar el razonamiento seguido. Igualmente, trata de verificar que comprende la importancia que tiene el cuidado en la disposición correcta de las cifras al realizar los algoritmos de las operaciones propuestas.

13. Perseverar en la búsqueda de datos y soluciones precisas en la formulación y la resolución de un problema

Se trata de ver si el alumno valora la precisión en los datos que recoge y en los resultados que obtiene y si persiste en su búsqueda, en relación con la medida de las distintas magnitudes, con los datos recogidos para hacer una representación gráfica y con la lectura de representaciones.

17. Indica cuáles de los siguientes instrumentos de evaluación podrían ser útiles para cada uno de los criterios básicos de evaluación (1 a 13) del currículo del MEC.

- Observación sistemática de las intervenciones de los alumnos en clase a lo largo del curso
- Revisión periódica de los cuadernos y apuntes de los alumnos;
- Pruebas específicas escritas tipo examen
- Preguntas realizadas en clase a alumnos particulares o a toda la clase;
- Trabajos de síntesis sobre un tema o una colección de lecturas. que muestren la comprensión y capacidad de síntesis
- Proyectos y trabajos individuales o colectivos
- Test de opciones múltiples
- Problemas para realizar en la clase o como trabajo de casa
- "Dossier" donde el profesor va recogiendo información diversa acerca del alumno
- "Diario" elaborado por los alumnos con resúmenes de lo aprendido en clase

4.3. La evaluación en los Estándares del NCTM

El National Council of Teachers of Mathematicas (NCTM, 1991), propone dos categorías de estándares de evaluación de la enseñanza de las matemáticas: El proceso y los focos de la evaluación. Sobre el proceso de evaluación se formulan tres estándares y sobre los focos de evaluación cinco estándares.

A: EL PROCESO DE EVALUACIÓN:

ESTÁNDAR 1: *EL CICLO DE EVALUACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería ser un proceso cíclico que implique:

- recogida periódica y análisis de información sobre la enseñanza de las matemáticas de un individuo;
- el desarrollo profesional basado en el análisis de la enseñanza;

- la mejora de la enseñanza como consecuencia del desarrollo profesional.

ESTÁNDAR 2: *LOS PROFESORES COMO PARTICIPANTES DE LA EVALUACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería proporcionar oportunidades progresivas para que los profesores:

- analicen su propia enseñanza;
- deliberar con los colegas sobre su enseñanza;
- consultar con sus supervisores sobre su enseñanza.

ESTÁNDAR 3: *FUENTES DE INFORMACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas debería estar basada en información procedente de una variedad de fuentes incluyendo:

- los objetivos del profesor y las expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes;
- los planes del profesor para el logro de estos objetivos;
- el archivo del profesor, formado por una muestra de planes de lecciones, actividades y materiales de los estudiantes, y los medios para evaluar la comprensión matemática de los estudiantes;
- análisis de múltiples episodios de enseñanza en clase;
- los análisis del profesor de la enseñanza en clase;
- evidencia, de la comprensión y actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

18. Indica todas las fuentes que el profesor puede utilizar para evaluar su propia actuación en el aula. ¿Por qué la autoevaluación es una parte importante de la tarea del profesor?

B. LOS FOCOS DE LA EVALUACIÓN:

ESTÁNDAR 4: *CONCEPTOS, PROCEDIMIENTOS Y CONEXIONES MATEMÁTICAS*

La evaluación de la enseñanza de conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas debería proporcionar evidencia de que el profesor,

- demuestra un conocimiento adecuado de los conceptos y procedimientos matemáticos;
- representa las matemáticas como una red de conceptos y procedimientos interconectados;
- enfatiza las conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas y las relaciona con la vida diaria;
- compromete a los estudiantes en tareas que promueven la comprensión de los conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas;
- compromete a los estudiantes en un discurso matemático que amplia su

comprensión de los conceptos, procedimientos y conexiones matemáticas.

ESTÁNDAR 5: *LAS MATEMÁTICAS COMO RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, RAZONAMIENTO Y COMUNICACIÓN*

La evaluación de la enseñanza de las matemáticas como un proceso que implica la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación debería proporcionar evidencia de que el profesor:

- ejemplifica y enfatiza los aspectos de resolución de problemas, incluyendo la formulación y el planteamiento de problemas, resolución de problemas usando diferentes estrategias, verificando e interpretando resultados, y generalizando soluciones;
- muestra y enfatiza el papel del razonamiento matemático;
- ejemplifica y enfatiza la comunicación matemática usando formas escritas, orales y visuales;
- compromete a los estudiantes en tareas que implican la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación;
- compromete a los estudiantes en el discurso matemático que amplia su comprensión de la resolución de problemas y su capacidad para razonar y comunicarse matemáticamente.

ESTÁNDAR 6: *PROMOCIÓN DE LA DISPOSICIÓN MATEMÁTICA*

La evaluación de que el profesor estimula la disposición matemática de los estudiantes debería proporcionar evidencia de que:

- modeliza una disposición para hacer matemáticas;
- muestra el valor de las matemáticas como un modo de pensar y sus aplicaciones en otras disciplinas y en la sociedad;
- promueve la confianza de los estudiantes, la flexibilidad, perseverancia, curiosidad, e inventiva en la actividad de matematización por medio del uso apropiado de tareas y comprometiendo a los estudiantes en el discurso matemático.

ESTÁNDAR 7: *EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES*

La evaluación de los medios, por los que el profesor evalúa la comprensión de las matemáticas de los estudiantes debería proporcionar evidencia de que el profesor —

- usa una variedad de métodos de evaluación para determinar la comprensión matemática de los estudiantes;
- los métodos de evaluación concuerdan con el nivel de desarrollo, madurez matemática, y 1a base cultural de. los estudiantes;
- los métodos de evaluación se corresponden con lo que se enseña y cómo se enseña;
- analiza la comprensión individual de cada estudiante, su disposición para hacer,

matemáticas, de modo que la información sobre su desarrollo matemático pueda ser proporcionado a los estudiantes, sus padres y al personal escolar pertinente;

- basa la instrucción en la información obtenida en la evaluación de la comprensión de los estudiantes y de su disposición hacia las matemáticas.

ESTÁNDAR 8: *ENTORNO DE APRENDIZAJE*

La evaluación de la capacidad del profesor para crear un entorno de aprendizaje que estimula el desarrollo de la capacidad matemática de cada estudiante debería proporcionar evidencia de que el profesor:

- transmite la idea de que las matemáticas son un contenido para ser explorado y creado tanto individualmente como en colaboración con otros.
- respeta a los estudiantes y sus ideas y anima su curiosidad y espontaneidad;
- estimula a que los estudiantes extraigan y validen sus propias conclusiones;
- selecciona las tareas que permitan a los estudiantes construir nuevos significados mediante la construcción y la extensión de su conocimiento previo;
- hace un uso apropiado de los recursos disponibles;
- respeta y responde a los diversos intereses de los estudiantes así como a sus identidades culturales, lingüísticas y socioeconómicas mediante el diseño de las tareas matemáticas;
- apoya y estimula la participación completa y el estudio continuado de las matemáticas de todos los estudiantes.

> 19. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto de la evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en primaria:
>
> - Currículo básico del MEC
> - Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
> - Principios y Estándares 1991 del NCTM.

5. DISEÑO Y GESTIÓN DE UNIDADES DIDÁCTICAS

En este apartado sólo se dan algunas indicaciones para conseguir el objetivo de aprender a diseñar y gestionar unidades didácticas, ya que, evidentemente, este objetivo es muy ambicioso y sólo se puede alcanzar a partir de la experiencia que se obtiene al impartir clases reales.

El diseño de unidades didácticas (programaciones de aula o tercer nivel de concreción del currículo) tendrá en cuenta los documentos oficiales (primer nivel de concreción) y el *proyecto de centro* (segundo nivel de concreción).

El diseño de unidades didácticas implica la toma de decisiones en distintos ámbitos de concreción hasta culminar en un documento en el que el profesor concreta los objetivos, contenidos, actividades, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y selección de estrategias metodológicas. Este documento será un instrumento de planificación y gestión del trabajo en clase con los alumnos, en un período corto de tiempo (unas 3 o 4 semanas) y se centra en un contenido matemático que tiene una cierta unidad temática, y que organiza el tratamiento de un cierto tipo de problemas en el nivel educativo correspondiente.

5.1 Elementos a tener en cuenta en la planificación de una unidad didáctica

Nos parece evidente que el diseño de las unidades didácticas se ha de basar en los seis elementos que describimos a continuación.

(1) La información disponible sobre los objetivos y contenidos del currículo de primaria y del proyecto de centro correspondiente.

Pero está información no es suficiente para asegurar que los alumnos realicen una actividad matemática "rica" que contemple los diferentes aspectos de dicha actividad descritos en el capítulo 1. Al analizar la actividad matemática en el primer capítulo vimos que un contenido que puede parecer elemental como, por ejemplo "suma", se convierte en un sistema complejo formado por conceptos, procedimientos, lenguaje, situaciones, argumentaciones, etc. Para analizar y organizar este sistema complejo las orientaciones curriculares, siendo importantes, son insuficientes, ya que el maestro tiene que tomar decisiones sobre el tipo de problemas que propondrá a los alumnos, el tipo de representaciones que utilizará, el orden de presentación de los contenidos, etc.

Por tanto conviene tener en cuenta en segundo lugar:

(2) Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.

Las situaciones de la vida cotidiana y las otras ciencias puede ayudarnos mostrando los problemas que se pueden resolver con los contenidos de la unidad didáctica, mientras que la historia de las matemáticas puede ayudarnos para saber cómo y por qué fueron planteados.

Los tipos de problemas se resuelven con determinados procedimientos, entre los cuales tendremos que hacer una selección; estos procedimientos se justifican por medio de unos conceptos que se tendrán que definir (institucionalizar) de una o varias maneras diferentes, estos conceptos y procedimientos se tendrán que representar por algunas de las diferentes representaciones que se utilizan normalmente, etc.

Por lo tanto también es conveniente tener en cuenta en tercer lugar:

(3) El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).

Un análisis a fondo de los contenidos a enseñar, su organización, estructura, relaciones lógicas, técnicas de resolución, formas de representación, etc. es fundamental para diseñar una secuencia didáctica. Para este análisis puede ser muy útil conocer la génesis histórica de los contenidos que se quieren enseñar, ya que ésta puede ser una fuente importante de material para su enseñanza. Considerar el momento histórico en el que se desarrolla un contenido matemático lleva a hablar de sus conexiones con la ciencia de la época, con las necesidades humanas, sociales o de cualquier otro tipo que llevaron al inicio y posterior desarrollo de dicho contenido. También obliga a hablar de las aplicaciones posteriores, esperadas o que surgieron de forma imprevista. Otro elemento a destacar es que la historia también puede ayudar a resolver el problema de la motivación del alumno.

Para este tipo de análisis también puede ser muy útil el estudio de las unidades didácticas que proponen los libros de texto. Un análisis comparativo de la organización que presentan los libros de texto de primaria es un elemento importante a tener en cuenta para elaborar una propuesta de unidad didáctica. De todas maneras, el análisis que se propone ha de ser un análisis de los contenidos a enseñar que lleve a su problematización y no a una asunción acrítica tanto de los contenidos del DCB como de las organizaciones que proponen los diferentes libros de texto para su enseñanza.

Los tres puntos anteriores son los fundamentales para el diseño de unidades. Ahora bien, hay otros aspectos a tener en cuenta. El primero de ellos son los recursos y materiales didácticos, ya que estos tienen una incidencia importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje y pueden condicionar la organización, los contenidos y la metodología de la unidad didáctica. Por ejemplo, el hecho de poder usar un programa de geometría dinámica como el programa Cabri, o bien una Hoja de Cálculo puede implicar que determinados contenidos de geometría o estadística puedan ser incorporados a la unidad.

Por lo tanto, un cuarto aspecto a tener en cuenta es el siguiente:

(4) Materiales y recursos disponibles para el estudio del tema, incluyendo los libros de texto y experiencias didácticas descritas en las publicaciones accesibles.

Otro elemento que conviene tener en cuenta es el conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado. En la fase de planificación de la unidad se pueden contemplar a priori estos errores y dificultades para diseñar actividades que los tengan presentes.

Por lo tanto, un quinto aspecto a tener en cuenta es el siguiente

5. *El conocimiento de los errores y dificultades recurrentes en el estudio del tema que la investigación didáctica ha documentado*

Por último conviene tener presente un sexto aspecto, ya que, por ejemplo, la organización de una unidad no será la misma si optamos por una metodología globalizadora, por ejemplo, un proyecto de trabajo, en la que se traten conjuntamente contenidos de varios bloques (por ejemplo, geometría y medida) que si no lo hacemos, y nos limitamos a los contenidos de un solo bloque.

Por lo tanto, un sexto aspecto a tener en cuenta es el siguiente

6. *Los criterios metodológicos y de evaluación incluidos en las orientaciones curriculares, así como las recomendaciones aportadas por la investigación didáctica descritas en publicaciones accesibles.*

5.2 Diseño de una unidad didáctica

Las consideraciones anteriores se refieren a la fase de la planificación de la unidad didáctica. Pero en el diseño de una unidad didáctica, hay que contemplar una primera fase de planificación y una segunda fase propiamente de diseño. En la fase de planificación conviene tener presente el mayor número posible de los seis aspectos comentados anteriormente. Una vez hemos recogido información sobre los elementos anteriores, podemos empezar a tomar decisiones que permiten el diseño efectivo de la unidad. Esto es, concretar en actividades de aula las tomas de posición sobre los aspectos anteriores.

Con relación a las actividades diseñadas se ha de remarcar que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende y lo que queda en los alumnos. Por lo tanto, hay que procurar incorporar en la unidad actividades "ricas" en el sentido de que permitan superar el aprendizaje pasivo, gracias a la incorporación al proceso de enseñanza-aprendizaje, entre otros, de algunos de los siguientes aspectos:

- la actividad del alumno,
- el uso de materiales,
- problemas contextualizados,
- grupos de trabajo,
- uso de diferentes representaciones,
- la contextualización de contenidos, etc.

Tal como se comentó en el capítulo 2 al tratar el estudio dirigido de las matemáticas conviene diseñar actividades que permitan la acción, la formulación, la validación y la institucionalización.

Por otra parte, es conveniente elaborar una unidad didáctica para un alumno "promedio", que contemple actividades de refuerzo para los alumnos con más dificultades y también actividades de ampliación.

En la fase de diseño también se han de contemplar actividades de evaluación inicial, formativa y sumativa.

Las consideraciones anteriores se han de concretar en un material que, de manera indicativa, tendrá la siguiente estructura:

- Objetivos
- Contenidos
- Una breve descripción de las actividades con orientaciones metodológicas y el tipo de recurso a utilizar
- Una breve descripción de las actividades de evaluación con orientaciones metodológicas
- Una breve descripción de las posibles actividades de refuerzo y de ampliación
- Recursos y materiales
- Bibliografía
- Actividades para los alumnos

5.3. Gestión de las unidades didácticas. Adaptaciones

En el diseño de la unidad se ha previsto, muchas veces de manera implícita, una determinada gestión de aula. Por ejemplo, si la unidad incorpora una actividad en la que los alumnos han de descubrir una fórmula para hallar el número de diagonales de un polígono, el maestro en la situación de acción de los alumnos tendrá una actuación muy diferente que en la situación de validación o en la de institucionalización de los resultados obtenidos.

La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad "pobre", mientras que una actividad mal diseñada, bien gestionada, se puede llegar a convertir en una actividad "rica".

A pesar de que en la planificación y el diseño de la unidad ya se ha previsto a priori una determinada gestión de aula y un determinado tratamiento de la diversidad, tenemos que pasar a analizar la gestión efectiva de aula que permite la unidad diseñada. Hay que tener en cuenta que esta unidad se va a utilizar con unos alumnos determinados sobre los cuales podemos tener mucha información de los cursos anteriores. Esta información, junto con la evaluación inicial de los alumnos y la evaluación formativa -utilizadas tal como se ha explicado en este capítulo- permiten adaptar la unidad a la diversidad de los alumnos. Esto es, la unidad didáctica se ha de adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.

En la fase de gestión de la unidad, el maestro tendrá en cuenta las características de las situaciones que pueden ser modificadas por él (variables didácticas), así como los fenómenos del contrato didáctico.

De todas maneras, hay que ser conscientes de que nos podemos encontrar con determinados alumnos que necesitarán una adaptación curricular. El currículum escolar propuesto por las administraciones tiene un carácter abierto, flexible o adaptable a las necesidades o características de la comunidad educativa en la que están inmersos los centros educativos. Esta concepción permite la puesta en marcha de un proceso de adaptación curricular a diferentes niveles, hasta llegar al nivel de concreción de una Adaptación Curricular Individual (ACI). Por tanto, a los tres niveles de concreción comentados anteriormente (DCB, Proyecto de centro, unidad didáctica) hay que añadirles un cuarto nivel que son las ACI, las cuales consisten en que los tutores, maestros y maestros de apoyo, asesorados por especialistas, acomodan el currículo teniendo en cuenta las características individuales.

5.4 La evaluación de la unidad didáctica

Una vez implementada la unidad didáctica es conveniente reflexionar sobre su utilidad y sobre su posible modificación. Para poner un solo ejemplo, si se ha optado por utilizar un determinado material es conveniente formularse preguntas del tipo: ¿He conseguido integrarlo en las actividades de los alumnos?¿Qué ventajas e inconvenientes he observado cuando la actividad se realiza con ese material?¿Lo volveré a a utilizar de la misma manera?¿Qué modificaciones introduciré en la secuencia de actividades para optimizar el uso de este material? ¿Hay algún material similar que ofrezca más ventajas?, etc.

20. Selecciona un contenido matemático y planifica una semana de trabajo para un nivel de primaria determinado teniendo en cuenta los criterios y elementos descritos en esta sección. Trabaja en equipo con otro compañero.

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE TEXTOS Y DOCUMENTOS CURRICULARES

(1) Discutir el siguiente comentario:

"El currículo está siempre en un proceso continuo de cambio con el fin de mantener un equilibrio entre las necesidades del contenido matemático, el niño y los cambios sociales ".

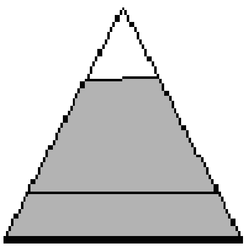
(2) Seleccionar un contenido matemático (por ejemplo, las fracciones). Comparar la manera en que se planifica su enseñanza en dos libros de texto diferentes.

(3) Seleccionar un contenido matemático (por ejemplo, la multiplicación de números naturales). Analizar su desarrollo en tres cursos en los libros de una misma editorial. Identificar lo que se repasa y lo que se incluye como nuevos conocimientos en cada nivel.

2. DIFERENTES TIPOS DE CONTENIDOS

(4) Identifica los tipos de contenidos (conceptos, procedimientos o actitudes) que pretenden evaluar las siguientes actividades:

1) ¿Se puede decir que la parte rayada del triángulo es 2/3? ¿Por qué?



2) Aproximadamente un tercio de los residuos sólidos es material combustible (papel, cartón, plásticos,...), la mitad es materia orgánica y el resto es material inerte (metales, vidrio, restos de obra,...). ¿Qué fracción de los residuos representa el material inerte? Si en un pueblo se producen diariamente 120 Kg de residuos, ¿Cuál es su composición?

3) Señalar el grado de acuerdo o desacuerdo respecto de las siguientes afirmaciones sobre las matemáticas, según el siguiente convenio:

1: Totalmente en desacuerdo; 2: En desacuerdo; 3: Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo); 4: De acuerdo; 5: Totalmente de acuerdo:

1. Considero las matemáticas como una materia muy necesaria en mis estudios.

   1 2 3 4 5

2. La asignatura de matemáticas se me da bastante mal.

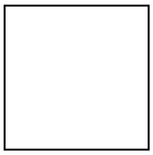
   1 2 3 4 5

3. Estudiar o trabajar con las matemáticas no me asusta en absoluto

   1 2 3 4 5

4) a) Dibuja otro polígono que tenga la misma área que este cuadrado de lado 6 m.

b) Dibuja otro polígono que tenga el mismo perímetro que este



3. ACTIVIDADES DE CAMPO

(5) **Proponer una prueba de resolución de problemas a un grupo reducido de alumnos de primaria**. Analizar las soluciones dadas por los alumnos y puntuar según la siguiente escala[1]:

Escala de puntuación de resolución de problemas	
Comprender el problema 0: Incomprensión completa del problema 1: Incomprensión o interpretación incorrecta de parte del problema 2: Comprensión completa del problema. *Planificación de la solución:* 0: No se intenta resolver o plan completamente inapropiado. 1: Plan parcialmente correcto basado en una interpretación correcta de parte del problema	2: El plan podría llevara la solución correcta si se hubiera implementado correctamente *Obtención de la solución:* 0: Sin solución, o respuesta errónea basada en un plan inapropiado. 1: Error de escritura o cálculo, respuesta parcial en un problema con varios apartados. 2. Respuesta correcta y formulación correcta.

4. DISEÑO DE SECUENCIAS DE ACTIVIDADES

(6) Preguntas para iniciar la reflexión:

a) ¿Conviene empezar a diseñar una unidad de estadística por la lectura de gráficas o bien por la confección de gráficas a partir de tablas?

b) ¿En la primaria hay que introducir la media ponderada?

[1] Reys, R. E. y cols. (2001). *Helping children learn mathematics* (Sixth edit.). New York: John Wiley. (p. 63).

c) ¿En el último curso de primaria es conveniente trabajar la estadística con la hoja de cálculo?

d) ¿Qué tipo de material y cómo se puede utilizar para hacer un gráfico de barras en el primer ciclo de primaria? .

(7) En la tabla incluida al final de este problema tienes una secuencia de 12 actividades de 6º de primaria. Reflexiona sobre esta secuencia de actividades teniendo en cuenta los siguientes aspectos[2]:

1. Organización de la actividad, gestión, recursos, etc.

a) ¿Se trata de una propuesta de trabajo colaborativo?. b) ¿Todos los alumnos pueden participar?. c) ¿Se presenta una situación que implica una actividad manipulativa?. d) ¿Qué tipo de material se utiliza? e) ¿Se trata de una tarea que permite que los alumnos realicen una actividad matemática "rica"?, f) ¿En cuál actividad el alumno tiene que dar justificaciones y argumentaciones? ¿Qué actividad se puede considerar una situación de acción? Compara la gestión de las actividades 8 y 10, etc..

2. Los contenidos y su organización

a) ¿Qué bloques del currículum se trabajan? b) ¿Se trabaja simultáneamente la geometría en tres dimensiones y la geometría en dos dimensiones?. c) ¿Cuáles son los principales contenidos que se trabajan en esta secuencia? Confecciona una tabla con los contenidos (conceptos, procedimientos y valores) que se han trabajado en cada una de las diferentes actividades.

3. Dificultades del alumno

a) Comenta las dificultades que crees que tendrán los alumnos de primaria. b) Lee y comenta el apartado "Representaciones bidimensionales del espacio tridimensional" (apartado 1.7, pp. 48-55) del libro *El aprendizaje de las matemáticas* (Dickson y cols., 1991). c) Si tienes oportunidad de que un alumno de 6º de primaria resuelva estas actividades, ¿qué tipo de dificultades has observado? ¿Qué tipo de dificultades has tenido tú para resolver estas actividades?

4. Actividades para continuar la secuencia

a) Observa que así como hay situaciones de acción o de argumentación no hay situaciones que sirvan para institucionalizar los contenidos que se han construido en el proceso de enseñanza-aprendizaje. ¿Cuáles son los contenidos que conviene institucionalizar en esta secuencia de actividades?. Diseña actividades para su institucionalización

b) Una casa ha de tener puertas, ventanas, etc. Una forma de continuar esta secuencia de actividades es que los alumnos construyan sus propias casas en base a módulos de 1 dm^3, pongan puertas, ventanas, tejado, etc.; hagan planos de su distribución, dibujen las vistas, etc. Diseña una secuencia de ampliación de las 12 actividades iniciales teniendo en cuenta estos aspectos.

[2] Font, V.(2003) La formación inicial en matemáticas de los maestros de educación primaria. Una propuesta dialógica. Actas *2º Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación*. Julio de 2002. Tarragona

c) ¿Qué escala es conveniente tomar para que la casa construida con los 4 cubos sea la maqueta de una casa razonablemente “real”? Diseña una ampliación de esta secuencia de 12 actividades que contemple el contenido "escala".

d) En la actividad 8 se ha de construir 1 dm^3 Esta actividad se suele proponer en las clases de primaria ya que una vez construido el cubo se puede plastificar con lo que se puede llenar de agua y a continuación pesar con una balanza. Esta actividad permite comprobar a los alumnos la relación entre el dm^3 , el litro y el kilogramo. Diseña una continuación de la secuencia de actividades para continuar el proyecto trabajando el volumen.

e) Antes de la secuencia inicial de 12 actividades se podría trabajar una secuencia de actividades sobre los poliminós que sirviera para justificar que sólo hay 35 hexaminós. Confecciona una propuesta de ampliación del proyecto trabajando actividades relacionadas con los poliminós.

f) El cubo y la casa son poliedros. Diseña una secuencia didáctica de ampliación en la que los alumnos primero tengan que construir otros poliedros y después tengan que resolver actividades en las que tengan que contar para cada poliedro las caras, los vértices y las aristas y, finalmente, comprobar (o bien obtener por inducción) el teorema de Euler.

g) Considera otras posibilidades de ampliación de la secuencia.

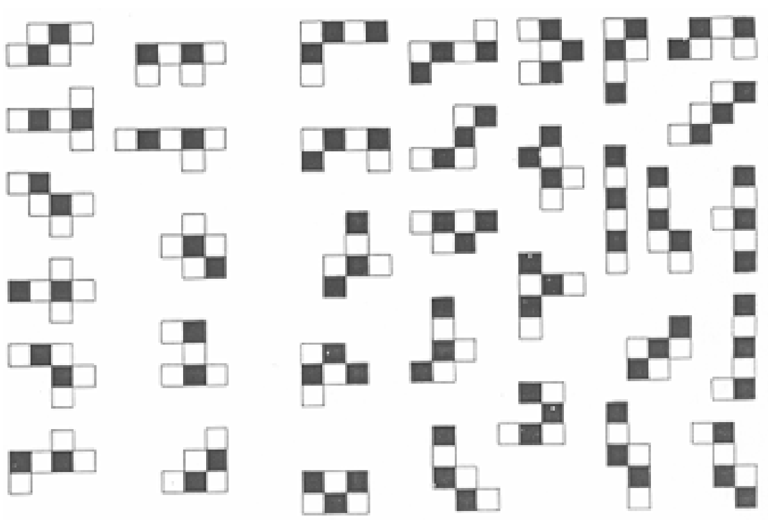
Secuencia de actividades para sexto curso:

Actividad 1: Frecuentemente has utilizado objetos con forma de cubo. Pon cuatro ejemplos.

Actividad 2: Dibuja un cubo

Actividad 3: ¿Qué es un "recortable" de un cubo? Dibuja uno.

Actividad 4: Los hexaminós son figuras formadas por seis cuadrados de manera que cada dos de ellos tengan un lado en común. A continuación tienes dibujados todos los hexaminós posibles. Entre los 35 hexaminós has de encontrar los 11 que permiten construir un cubo. Puedes dibujar el hexaminó en papel cuadriculado para poderlo recortar con unas tijeras.



Actividad 5: Un cubo tiene caras, aristas y vértices:

a) Dibuja un cubo y señala un vértice, una cara y una arista
b) ¿Cuántas caras tiene un cubo? ¿Cuántas son laterales?¿Y cuántas son bases?
c) ¿Cuántas aristas tiene un cubo?
d) ¿Cuántas caras confluyen en un vértice?

Actividad 6: Fíjate en los hexaminós que no son "recortables" de un cubo:

a) Teniendo en cuenta el número de caras que confluyen en un vértice, ¿cuáles de los hexaminós quedan descartados como "recortables"?
b) ¿Has observado alguna otra característica?

Actividad 7: Para construir un cubo a partir de un hexaminó que es un "recortable" suyo necesitamos pestañas.

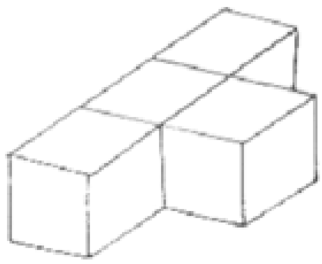
a) Dibuja un hexaminó que sea un "recortable" del cubo con las pestañas necesarias. Recórtalo y comprueba que se obtiene un cubo.
b) Repite el mismo proceso con otro hexaminó que sea un "recortable" del cubo.
c) ¿Has necesitado las mismas pestañas?¿Cuál es el número mínimo de pestañas que se necesitan?

Actividad 8: Dibuja un hexaminó que sea un recortable del cubo (con las pestañas) de lado 10 cm en una cartulina. Recórtalo y engánchalo.

Actividad 9: Cada grupo de cuatro alumnos tiene cuatro cubos. Construir una casa con estos cuatro cubos de manera que cada dos cubos se toquen.

Actividad 10: Construye todas las casas posibles. ¿Cuántas hay? Dibújalas.

Actividad 11: Pon los cuatro cubos en posición de "T" y dibuja las vistas (alzado, planta y perfil)



Actividad 12: a) Construye un "recortable" -con las pestañas necesarias- que permita construir una casa. El modelo más simple es la casa de cuatro cubos en forma de "T", pero también se puede hacer con casas de más de 4 cubos.

b) Construye la casa con una cartulina y de manera que las aristas sean de 10 cm.

BIBLIOGRAFÍA

Burgués, C. (2000). El currículum de primaria. En, J.M. Goñi (Coord.), *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI* (pp. 59-66). Barcelona: Graó.

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Síntesis. (apartado 2.2)

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis.

Gorgorió, N., Artigues, F., Banyuls, F., Moyano, D., Planes, N., Roca, M. y Xifré, A. (2000). Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. *Suma*. 33: 59-71.

Jorba, J. y Casellas E. (1997). *La regulación y la autoregulación de los aprendizajes*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2001). Matemáticas en educación primaria. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 23-40). Madrid: Síntesis.

Secada,W.G., Fennema, E. y Adajian,L. B. (Comps) (1997). *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: MEC-Morata.

Capítulo 4

RECURSOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN SOBRE LOS RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Consigna:

A continuación se presenta un extracto de un documento sobre el uso de recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas en primaria.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
2) ¿Qué papel da a los alumnos en su proceso de aprendizaje? ¿Qué requisitos se sugieren para las situaciones didácticas a proponer en la clase de matemáticas?
3) ¿Por qué se destaca la importancia del material manipulativo? ¿En qué forma se sugiere su uso?
4) ¿Cómo debe complementar el profesor el uso del material didáctico?
5) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Extracto del documento:

Para ayudar a los chicos y chicas de tercer ciclo a construir conocimientos matemáticos es preciso **combinar varios factores en una secuencia de aprendizaje:**

* Por un lado, es importante proponerles situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, por ejemplo: distribuir cosas entre..., buscar todos los que tengan..., construir una figura que sea..., y, a ser posible, que tengan una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones; aunque esto último no siempre resulta fácil, cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados.

* Igualmente, es importante ofrecer material que ayude a representar la propuesta: cubos, ábacos, instrumentos de medida, cuerpos geométricos o material para construirlos, etc., es decir, algo que permita que, al pensar maneras de resolver una determinada cuestión, se pueda materializar y comprobar los resultados de una manera física. Si, por ejemplo, les proponemos que busquen distintas maneras de dividir un cuadrado en partes iguales y disponen de un cuadrado de papel, podrán doblarlo o recortarlo y comprobar así algunas de las combinaciones que se les ocurran.

* La manipulación, siempre que sea posible, no debería ser silenciosa; debemos intentar que describan lo que están haciendo, que evoquen lo que hicieron en otro momento, motivarles con preguntas para que hagan conjeturas, expresen lo que están considerando y que lo discutan con sus compañeros. Obtendremos así varios efectos beneficiosos: uno de ellos es provocar la verbalización, cosa que influye de manera muy determinante en la clarificación de las propias ideas y en la elaboración de conceptos; otro es el establecimiento de un intercambio, una discusión entre iguales que fomenta la seguridad y la confianza en uno mismo, actitud que resulta fundamental en el aprendizaje de las matemáticas; además, en el transcurso de estas discusiones, podemos ayudar a considerar el error no como un fracaso, sino como una forma de aproximación a la solución adecuada.

* Es importante también ayudar a generalizar, a encontrar “la norma”, para lo cual hay que promover experiencias similares que consideren un abanico de ejemplos suficientes y representativos que sirvan de referencia, y conducir, con preguntas y ejemplos, el pensamiento de los niños hasta llegar a la conceptualización. Obtendrán así una definición o una norma que, por ser elaborada a partir de experiencias concretas y con la práctica y la discusión, tiene un valor totalmente distinto al de la definición que se podría haber dado a un alumno considerado receptor.
* No hay que olvidar tampoco la importancia de la mecanización. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que practicarlas con el fin de alcanzar un dominio que permita utilizarlas economizando esfuerzos; por lo tanto, deben proponerse también ejercicios encaminados a conseguir una automatización de determinadas habilidades.

Este planteamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contrasta con el que muchos de nosotros hemos vivido como alumnos cuando el lápiz y el papel, la tiza y la pizarra eran los únicos elementos que acompañaban la explicación del maestro; explicación que se limitaba, en muchos casos, a dar unos enunciados que se debían memorizar, que nadie podía discutir, ni siquiera comentar, y que representaban el preludio de una serie de ejercicios que hay que resolver.

Desde entonces han cambiado muchas cosas: los niños tienen libros de texto agradables y bien ilustrados y pueden, por supuesto, comentar y preguntar con mucha más libertad a su maestro, pero debemos plantearnos hasta qué punto hemos conseguido cambiar la idea de fondo y si realmente admitimos que para aprender hay que reelaborar los conocimientos en un proceso en el que es preciso tantear soluciones, comentar ideas y razonar resultados, y en el que cada cual participa a la vez de forma individual y como miembro de una colectividad. Nuestras ideas respecto a este tema imprimirán un cariz decisivo al aprendizaje que fomentemos, e influirán más, por supuesto, que el material que utilicemos.

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de las comunidades autónomas españolas, y de otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. El uso de recursos manipulativos como el geoplano, tangram, ábacos, material multibase, dados, fichas, etc. se presenta como "casi obligado" en los niveles primarios y secundarios. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. También en España los profesores se han preocupado por el tema; por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó unas jornadas específicas sobre el tema.

Uno de los argumentos en que se apoyan estas orientaciones es que se supone que los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real. Sin embargo, es necesario profundizar sobre el sentido, fundamento y problemática que plantea a los profesores y a los investigadores en didáctica de las matemáticas el uso de materiales "manipulativos" en el estudio de las matemáticas.

Este capítulo tiene dos objetivos principales:

- Proporcionar al profesor en formación un marco conceptual que le ayude a tomar una posición crítica y constructiva sobre el uso de los recursos didácticos, y en particular los materiales manipulativos, en la enseñanza de las matemáticas.
- Hacerle reflexionar sobre la complejidad del uso de los materiales concretos debido a las relaciones nada simples que existen entre los materiales, las situaciones didácticas y los diversos lenguajes utilizados en la construcción de los conceptos y estructuras matemáticas.

2. RECURSOS DIDÁCTICOS

Son muchos los posibles recursos didácticos que podemos usar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Ejemplos

- Los propios libros de texto, cuadernos de ejercicio, pizarra, lápiz, papel e instrumentos de dibujo o la calculadora que usamos habitualmente en clase son recursos didácticos, puesto que ayudan al alumno en su aprendizaje y al profesor en la enseñanza.
- Cuando se enseña a los niños a contar, se puede usar como recurso los propios dedos de las manos, piedrecillas, regletas Cuisenaire, material multibase, etc.
- Juegos habituales, tales como la oca, parchís, ruleta, dominó, dados, cartas, pueden ayudar a los niños a comprender la idea de azar y probabilidad.

- Recursos didácticos más sofisticados incluyen los documentales grabados en vídeo sobre aspectos concretos de las matemáticas, los programas didácticos de ordenador y recientemente los recursos en Internet.

Para comprender mejor la importancia de los recursos o material didáctico, se usan diferentes clasificaciones de los mismos. Una de ella consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

- *Ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.
- *Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

1. ¿Qué tipos de recursos usas o has usado personalmente en el estudio de las matemáticas? ¿Cuáles te han sido más útiles?

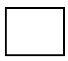
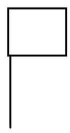
2. En la década de los 80 estuvo en auge el lenguaje de ordenador LOGO. En este lenguaje los niños pueden dar órdenes a una "tortuga" que se desplaza por la pantalla del ordenador y "conoce", entre otras, las órdenes avanza (AV) gira derecha (GD), gira izquierda (GI) y REPITE. Además se puede enseñar a la tortuga nuevas palabras mediante el comando PARA.

Una vez aprendidas nuevas palabras, se puede dar órdenes a la tortuga utilizándolas. Como ejemplo, mostramos las instrucciones para enseñar a la tortuga las palabras cuadrado y bandera.

a. ¿Clasificarías el lenguaje LOGO de ayuda al estudio o de instrumento semiótico?

b. ¿Qué complemento sería necesario para que el lenguaje LOGO cumpliese ambas funciones?

c. Busca algunos libros sobre lenguaje LOGO y analiza qué parte o partes de las matemáticas pueden beneficiarse del uso de este recurso.

PARA CUADRADO REPITE 4 AV 50 GD 90		PARA BANDERA AV 50 CUADRADO	

3. AYUDAS AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Los libros de texto y apuntes

El recurso didáctico más común en la enseñanza de cualquier tema es el libro de texto. Por ello es importante tener un criterio para elegir los que se han de recomendar a los alumnos. El libro de texto "conserva y transmite" de alguna formal el conocimiento matemático, puesto que el alumno lo usa como referencia, cuando tiene que resolver un problema o recordar una definición o propiedad.

Hay que tener en cuenta además que las matemáticas que se presentan en un libro destinado a los niños son muy diferentes de las matemáticas que usan los matemáticos (por ejemplo, la que encontramos en un texto universitario). En el capítulo 1 ya hemos comentado que en didáctica se habla de *transposición didáctica* para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. La transposición didáctica es necesaria porque:

- Hay que seleccionar y secuenciar las partes de las matemáticas que se van a enseñar a los alumnos de un cierto nivel escolar.
- Hay que adaptarlas para hacerlas comprensibles a los niños; para ello se requiere prescindir de la formalización y usar un lenguaje comprensible para ellos.
- Hay que buscar ejemplos, problemas y situaciones que interesen a los niños y que permitan a los alumnos apropiarse de los conocimientos pretendidos.

3. Compara la presentación de los números naturales en tu texto de matemáticas (por ejemplo, en el capítulo 1 de este Manual) con la que se hace en los libros de texto de primer a tercer curso de primaria. ¿Qué diferencias observas? ¿Cómo se ha secuenciado el tema para hacerlo asequible a los alumnos? ¿Son los ejemplos presentados a los niños los mismos que los presentados en el texto para la formación del profesor?

La importancia del libro de texto es resaltada en diversos documentos:

- En el denominado Informe Cockcroft[1] se afirma que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula".
- En Rico[2] encontramos que "El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es "científica", apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir".
- Romberg y Carpenter[3] por su parte indican que "el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro".

Quizás en estas citas hay también una advertencia velada: el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto. No todos ellos son igualmente valiosos. Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado y que el significado que se presente de las matemáticas esté carente de sesgos.

[1] Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan.* Madrid: MEC (p.114).
[2] Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática (pp. 17-62). Sevilla: Alfar* (p.22).
[3] Romberg, T. A. y Carpenter, T. P (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850-869). New York: McMillan (p. 867).

Además de los libros de texto, los cuadernos de ejercicios, esquemas y apuntes de los alumnos son también herramientas importantes en el aprendizaje. Los apuntes también pueden proporcionar información al profesor sobre lo que sus alumnos aprenden.

> 4. Compara el tema de fracciones en dos libros de texto de primaria diferentes. ¿Cuál te parece más completo y por qué? ¿Puedes observar algún sesgo, por ejemplo, la falta de un punto importante para el aprendizaje de los alumnos?
>
> 5. Consigue unos apuntes de dos de tus amigos tomados en la clase de matemáticas y compara con los tuyos propios. ¿Puedes detectar algún punto incorrectamente comprendido? ¿Qué partes de la lección fueron recogidas por los tres estudiantes? ¿Cuáles sólo por alguno de ellos? Si tú fueras el profesor, ¿cómo podrías usar estos apuntes para mejorar tu acción docente?

3.2. Las tareas matemáticas y situaciones didácticas entendidas como recurso. Variables didácticas

Desde una perspectiva muy general podemos considerar que las tareas que se proponen en la clase de matemáticas son un recurso didáctico que puede controlar el profesor. En el capítulo 2 sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, destacamos que al resolver estas tareas el alumno dota de significado a los conceptos matemáticos y también describimos las características deseadas en las tareas matemáticas.

Estas tareas toman diversas formas en los libros de texto y en el material elaborado por el profesorado, pero los ejemplos y ejercicios son una parte importante. Una práctica común en los libros de texto es mostrar al alumno algunos ejemplos del concepto antes o después de haberlo definido y estudiado sus propiedades y luego asignarle algunos ejercicios para reforzar el aprendizaje. Esta práctica se justifica porque se supone que se gana maestría en el tema a través del trabajo con los ejercicios y de los ejemplos mostrados del concepto.

Por otra parte, el aprendizaje matemático no es consecuencia directa y exclusiva de la confrontación de los alumnos con tareas más o menos problemáticas. Los problemas matemáticos propuestos en clase formarán parte de dispositivos más generales y complejos que son las secuencias de *situaciones didácticas*. Estas secuencias de situaciones, tal como ya hemos comentado en el capítulo 2 al analizar el estudio dirigido de las matemáticas, deben contemplar no sólo los momentos de la acción/ investigación personal de los alumnos con las tareas - fase para la cual el material tangible puede desempeñar un papel importante - sino que deben diseñarse e implementarse, además, momentos de formulación /comunicación de las soluciones, justificación /discusión de las mismas, institucionalización de los conocimientos pretendidos (compaginar las técnicas, el lenguaje y los conceptos puestos en juego con la cultura matemática correspondiente).

> 6. Propón una lista de ejercicios sobre la multiplicación de fracciones. Inventa una situación didáctica a partir de la cual el alumno pueda llegar a comprender para qué se necesita la multiplicación de fracciones.

Variables didácticas

La resolución de problemas ha sido una de las áreas de investigación de mayor impacto en la didáctica de las matemáticas. Los investigadores interesados en entender la interacción entre el estudiante y la tarea de resolución de problemas han analizado las tareas presentadas, las características de los estudiantes, de la situación de evaluación, la enseñanza recibida y otros puntos, tratando de ver cuáles de ellos influyen tanto en el éxito del alumno al resolver el problema como en su aprendizaje.

En la bibliografía sobre resolución de problemas se suele diferenciar tres tipos principales de variables, que, en nuestra opinión, se puede extender a casi todo tipo de tarea matemática:

- *variables del problema:* en un mismo problema o tarea, ligeras variaciones en el enunciado, pueden variar su dificultad, las estrategias con que los alumnos tratan de resolverlo o bien los contenidos matemáticos de la tarea.
- *variables del sujeto:* los alumnos tienen diversas capacidades, intereses, actitud e historia. Las circunstancias sociales y familiares también pueden influir, por ejemplo, el apoyo de sus padres en el estudio o los medios que éstos le proporcionan.
- *la situación de resolución*, herramientas disponibles, si se trabaja sólo o en grupo, etc.

Interesa destacar aquellas variables cuyo control se puede considerar como un recurso del profesor, es decir sobre las que podemos actuar y que producen un cambio significativo en lo que el alumno aprende: son las llamadas *variables didácticas.* Generalmente son variables de tarea o de la situación; pero también a veces se puede actuar sobre las variables del sujeto, por ejemplo, tratando de aumentar el interés o mejorar la actitud de los alumnos.

7. Considera el siguiente ejercicio. Identifica posibles variables de tarea y escribe el enunciado de otros ejercicios similares, variando estas variables.

Juan y María juegan a lanzar dos monedas. Si salen dos caras Juan gana un euro y en otro caso María gana un euro. ¿Es equitativo el juego? ¿Cuánto tiene que ganar María para que el juego sea equitativo?

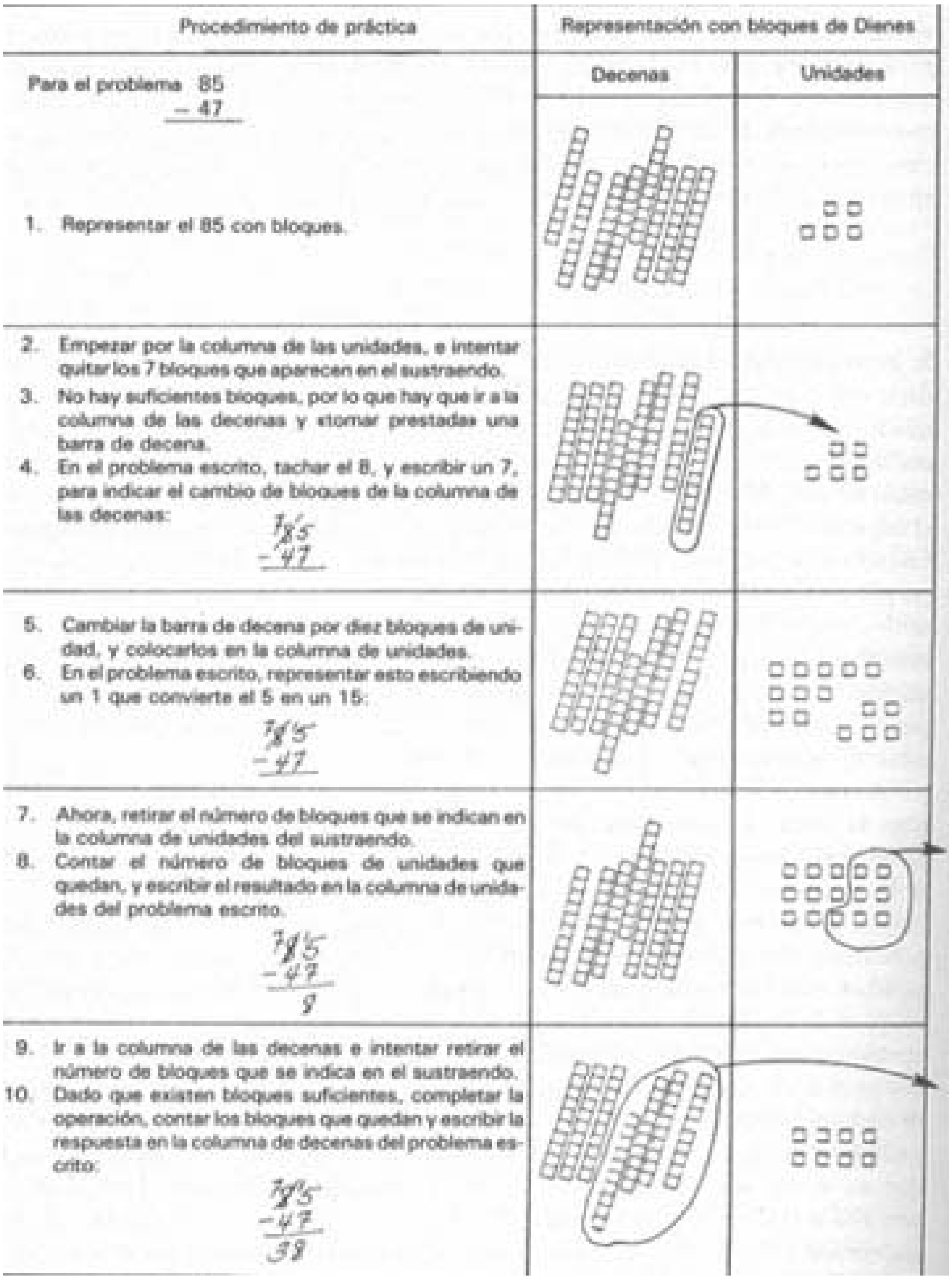
4. MATERIAL MANIPULATIVO

A continuación planteamos unas reflexiones sobre esta segunda clase de recursos didácticos, que, en realidad, constituyen los instrumentos semióticos del trabajo matemático (sea éste profesional o escolar). Nos referiremos a ellos con el nombre genérico de *manipulativos* y distinguiremos dos tipos, "manipulativos tangibles" y "manipulativos gráfico-textuales-verbales":

- "*Manipulativos tangibles*" –que ponen en juego la percepción táctil: regletas, ábacos, piedrecillas u objetos, balanzas, compás, instrumentos de medida, etc. Es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas. Por ejemplo, un niño puede usar conjuntos de piedrecillas para representar los números naturales.

Ejemplo

En Resnick y Ford[4] se describe el caso de Leslie, una niña de 9 años que utilizaba sistemáticamente una regla defectuosa para la resta, a saber, la de restar el número menor del mayor en cada columna, sin tener en cuenta cuál era el sustraendo y cuál el minuendo. Leslie realizaba manipulaciones simbólicas con los números pero no les atribuía un significado. Estas manipulaciones simbólicas pueden ser "concretadas" de manera tangible con un material: los bloques de base diez de Dienes. Este material fue usado con Leslie para dar un significado concreto a sus manipulaciones con símbolos numéricos de la manera siguiente:



Procedimiento de práctica	Representación con bloques de Dienes	
	Decenas	Unidades
Para el problema 85 − 47 1. Representar el 85 con bloques.		
2. Empezar por la columna de las unidades, e intentar quitar los 7 bloques que aparecen en el sustraendo. 3. No hay suficientes bloques, por lo que hay que ir a la columna de las decenas y «tomar prestada» una barra de decena. 4. En el problema escrito, tachar el 8, y escribir un 7, para indicar el cambio de bloques de la columna de las decenas: $\overset{7}{\cancel{8}}5 - 47$		
5. Cambiar la barra de decena por diez bloques de unidad, y colocarlos en la columna de unidades. 6. En el problema escrito, representar esto escribiendo un 1 que convierte el 5 en un 15: $\overset{7}{\cancel{8}}{}^{1}5 - 47$		
7. Ahora, retirar el número de bloques que se indican en la columna de unidades del sustraendo. 8. Contar el número de bloques de unidades que quedan, y escribir el resultado en la columna de unidades del problema escrito. $\overset{7}{\cancel{8}}{}^{1}5 - 47 = 9$		
9. Ir a la columna de las decenas e intentar retirar el número de bloques que se indica en el sustraendo. 10. Dado que existen bloques suficientes, completar la operación, contar los bloques que quedan y escribir la respuesta en la columna de decenas del problema escrito: $\overset{7}{\cancel{8}}{}^{1}5 - 47 = 38$		

- "M*anipulativos gráfico-textuales-verbales*" –en los que participan la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc. Es importante resaltar que este

[4] Resnick, L. B. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós-MEC (pp. 248-252).

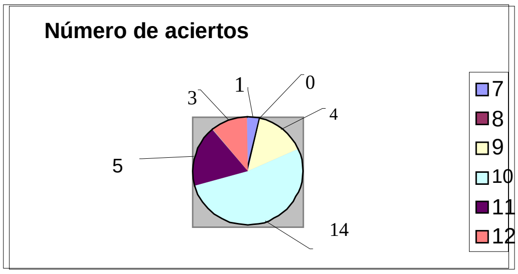
segundo tipo de objetos -gráficos, palabras, textos y símbolos matemáticos, programas de ordenador- también pueden manipularse, pues podemos actuar sobre ellos. Sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos y al mismo tiempo son instrumentos del trabajo matemático.

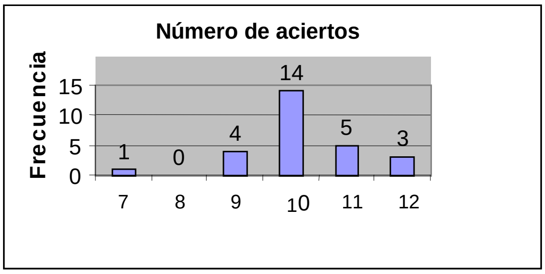
El carácter dinámico y "manipulable" de los sistemas de signos matemáticos está siendo potenciado recientemente por el uso de las nuevas tecnologías en las distintas ramas de las matemáticas (Geometría, Cabri; Análisis de datos, Statgraphics; Cálculo, Derive; etc.)

Ejemplo

Las gráficas siguientes están realizadas con la hoja de cálculo EXCEL, disponible en la mayor parte de los ordenadores. En EXCEL u otras hojas electrónicas, los alumnos pueden introducir sus datos, realizar con ellos cálculos (lo que le obliga a pensar la fórmula correspondiente para obtener el resultado deseado) y pasar de un gráfico a otro. Cada gráfico se puede manipular de diversas formas, cambiando, por ejemplo, las escalas, rótulos, números de datos.

Cada una de estas gráficas, y el mismo listado de datos en la hoja constituye un sistema diferente de representación que visualiza distintos conceptos matemáticos. Por ejemplo, mientras el gráfico de sectores visualiza mejor la proporción que cada dato representa del total (frecuencia relativa, fracción como parte-todo) el gráfico de barras visualiza mejor la frecuencia absoluta, así como la idea de escala numérica para las frecuencias. En el caso de datos numéricos también visualiza mejor la tendencia central (moda) y dispersión).





8. La tabla 100

La tabla que reproducimos a continuación muestra una disposición de los números del 0 al 99 que se conoce como la "tabla 100"; una variante puede ser comenzar desde 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

a. Inventa algunas tareas utilizando esta tabla que sean útiles para el aprendizaje de la serie numérica, ligadas al descubrimiento de patrones o regularidades en la disposición de los números.

b. ¿Cómo se manipulan los números de la tabla para descubrir los patrones?

c. ¿Qué objetos matemáticos se representan en la tabla? ¿Cuáles se pueden representar mientras buscamos los diferentes patrones?

d. Construye una tabla similar para un sistema de numeración diferente (por ejemplo, en base 5). ¿Cómo se modifican ahora los patrones que habías encontrado para la tabla 100?

4.1. Funciones del material textual

Las funciones que pueden desempeñar los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas elementales se explican porque algunas teorías ampliamente aceptadas sobre el aprendizaje de las matemáticas dan un peso importante a las relaciones entre lenguaje y pensamiento y conceden, por ello, gran relevancia a los medios de expresión en la actividad y el estudio de las matemáticas.

No podemos olvidar que tanto las situaciones didácticas, problemas y tareas que proponemos a los niños como los objetos abstractos que ellos deben evocar para resolverlos (por ejemplo, la ideas de número, operación, suma, propiedad asociativa, ...) requieren del lenguaje para ser comunicadas por los niños a su profesor o compañeros, o incluso para pensar en ellas.

Ejemplo:

Los símbolos matemáticos permiten expresar cantidades, realizar operaciones, fijar procesos y resultados intermedios, localizar y corregir posibles errores, obtener reglas y algoritmos estrechamente ligados a tales expresiones simbólicas. Por ello, el cálculo escrito potencia el cálculo mental, que no es sino la manipulación interiorizada de los lenguajes tangibles, verbales y gráfico-textuales.

9. Reproducimos a continuación un problema y las soluciones al mismo de tres alumnos. ¿Qué objetos matemáticos representan los símbolos en cada una de las tres soluciones? ¿Cómo operan los alumnos con dichos símbolos? ¿Cómo puede utilizar el profesor las respuestas para detectar errores de comprensión?

Problema. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

$$\frac{8+8+4+4+4+4+4+4+4+4}{10} = \frac{16+16+16}{10} = \frac{48}{10} = 4'8 \text{ horas}$$

$$m = \frac{2.8+8.4}{10} = 4'8 \text{ horas/estudiante}$$

He hecho los calculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias.

$$\frac{7 \text{ días}}{4\ h} = \frac{2 \text{ días}}{1'1\ h} \qquad 1'1\ h + 8\ h = \boxed{9'1\ h}$$

Los sistemas de signos matemáticos desempeñan un papel esencial en el trabajo matemático, de manera que el progreso en la puesta a punto de tales recursos está fuertemente relacionado con el avance de las matemáticas.

Pero no todos los instrumentos semióticos son igualmente eficaces para resolver problemas matemáticos. Pensemos, por ejemplo, en la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante, piedrecillas o el sistema de numeración romano; o también, en la mayor eficacia del registro escrito algebraico frente al registro oral característico de la aritmética tradicional.

10. Intenta resolver el siguiente problema suponiendo que no puedes utilizar el álgebra (por ejemplo por tanteo como lo podría resolver un alumno de primaria). Después vuelve a resolverlo utilizando las ecuaciones (por ejemplo como lo resolvería un alumno de secundaria)

a) La edad de Ana es el triple de la edad de Alberto. Las dos edades suman 32. Halla estas edades por tanteo completando la tabla siguiente:

Edad de Alberto	Edad de Ana	Suma de las dos edades
2	$3 \cdot 2 = 6$	$2 + 6 = 8$ El resultado es menor
12	$3 \cdot 12 = 36$	$12 + 36 = 48$ El resultado es mayor
6	$3 \cdot$ …. = ….	6 + …. = ….
….		

b) Resuelve el problema anterior utilizando ecuaciones

Una vez reconocidos los papeles instrumentales y representacionales (semióticos) de los recursos manipulativos en la actividad matemática tenemos que analizar su eficacia relativa, el espacio y circunstancias en las que cada manipulativo se revela como mejor adaptado a la función requerida. Así, por ejemplo, diversas investigaciones han mostrado que la aritmética oral es más eficaz que la escrita en ciertos contextos etnomatemáticos; que el ábaco japonés puede superar en eficacia a la calculadora; que, como dice el proverbio, "una imagen vale más que mil palabras". Pero tales ventajas se restringen a ámbitos reducidos y específicos frente a la generalidad de los "manipulativos textuales", como se refleja en el uso del lenguaje algebraico en la mayor parte de las matemáticas.

11. Realiza la suma: 14278 + 1799 + 93219: a) mentalmente; b) usando numeración romana; c) usando el algoritmo habitual de la suma. ¿Cuál de los tres métodos te parece más eficaz? ¿Qué papel representan los símbolos manipulativos en cada uno de los tres sistemas?

12. Da una lista de situaciones de la vida diaria en que habitualmente se use la aritmética oral.

4.2. El material manipulativo como puente entre la realidad y los objetos matemáticos

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en el que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. La construcción de modelos matemáticos, su comparación con la realidad, y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas matemáticos, no sólo relacionados con situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Ejemplo:

Supongamos que quiero estimar el tiempo que debo esperar cada día en la parada del autobús que tomo para ir a la facultad. En el paso 1 observaré durante algunos días el tiempo que espero, para diferenciar, si es o no constante. Si observo bastante variación y es difícil predecir el tiempo exacto de espera, consideraré que estoy en una situación aleatoria. Para ello debo admitir que la situación es, por lo menos potencialmente, reproducible (tengo que esperar al autobús más de una vez en condiciones similares) y que tiene diferentes resultados posibles, sin que sepamos con seguridad cuál será el que ocurrirá en una experiencia particular (no sé con seguridad el tiempo que debo esperar en la parada a que aparezca el autobús).

Una vez aceptada la aleatoriedad de la situación, en el paso 2 debemos realizar una descripción simplificada de la misma que nos permita pasar de la realidad observada (paso 1) a la construcción del modelo (paso 3). Para ello tomamos unos aspectos de la situación y prescindimos de otros. En el ejemplo del autobús deberemos decidir qué parada elegimos, si esperamos un autobús dado (el número 1) o si contamos el tiempo hasta que aparezca en la parada cualquier autobús. También si diferenciamos la hora del día o el día de la semana o no.

Al comenzar la construcción del modelo (punto 3) de nuevo se precisan una serie de decisiones: ¿aceptamos que el tiempo de llegada del próximo autobús es independiente del que acaba de llegar? ¿trataremos los tiempos como una variable continua? ¿cuáles son otras variables, además del tiempo de espera que me podrían interesar en el trabajo con el modelo?

Una vez que hemos construido un modelo matemático para la situación (por ejemplo aceptamos que los tiempos de espera varían entre 10 y 30 minutos y cualquier tiempo en este intervalo es equiprobable) puedo trabajar con el modelo para obtener resultados "matemáticos".

Finalmente queda todavía la parte más importante: comparar estas conclusiones con el comportamiento real de la situación analizada y decidir que el modelo matemático elegido nos proporciona una buena descripción de la realidad.

El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecirla y si es posible controlarla. Un modelo no es "real", ni tampoco "verdadero"; en el mejor de los casos es consistente y concordante con las observaciones. Esto se olvida con facilidad y se suele confundir "modelo" y "realidad".

Por otro lado, todos los pasos 1 a 5 son igualmente importantes en la actividad de modelización. Sin embargo, en la clase de matemáticas, con frecuencia nos apresuramos a correr a los pasos 3 y 4 (las "verdaderas" matemáticas) con lo que se impide al alumno apreciar la relación entre matemáticas y realidad así como la aplicabilidad y limitaciones de las matemáticas.

> 13. Da otros ejemplos de situaciones reales que puedan ser estudiadas con ayuda de un modelo matemático. Para cada una de ella indica en qué forma simplificamos la realidad para poder modelizarla, qué tipo de modelo matemático utilizamos y cómo podemos comprobar que el modelo es útil para describir la realidad.

Utilidad del material tangible en la actividad de modelización

Algunas veces la parte formal del modelo matemático (puntos 3 y 4 del proceso) es demasiado abstracta para la edad de los alumnos, quienes, sin embargo, podrían comprender bien los pasos 1, 2 y 5, así como adquirir al menos intuitivamente alguna comprensión sobre el modelo matemático o sobre alguna de sus propiedades y relaciones. Una pregunta que se plantea el profesor en estos casos es si sería posible llevar a cabo un estudio intuitivo de un problema o de un tema, con ayuda del material concreto o tangible. Aunque este estudio no sería todavía un estudio matemático particular, podría preparar al alumno para una comprensión posterior más completa.

Ejemplo:

Supongamos que planteamos a unos alumnos de primaria la tarea de encontrar cuál de todos los rectángulos de perímetro dado tiene área máxima y, posteriormente, cuál de todos los polígonos regulares de perímetro dado tiene área máxima.

Un estudio formal podría no estar a su alcance, porque se necesitaría la idea de función, para escribir el área en función del perímetro, y también la idea de derivada así como la capacidad de derivar que se adquiere sólo al final de la secundaria.

Sin embargo, podemos proporcionar a los alumnos algunos materiales concretos que les permitan explorar el problema y llegar a una conjetura. Algunos de estos materiales podrían ser:

- Una hoja de papel cuadriculado; podrían tratar el primer problema en forma aproximada, solo para valores discretos, es decir cuando solo se toman medidas enteras del perímetro y área.
- un geoplano y una cinta de longitud fija, no elástica, junto con una regla para medir, papel lápiz y calculadora ordinaria.
- Una calculadora gráfica.
- Un microordenador, dotado de Lenguaje LOGO que el alumno pueda programar.
- Un ordenador dotado del lenguaje CABRI.

Observamos en el ejemplo, que no siempre llegamos a la parte de formulación matemática. Sin embargo, en todos los casos hemos comenzado una actividad de modelización, que será diferente según el material udilizado. Entre el *dominio de la realidad* en que se encuentra la situación que queremos analizar y el *dominio teórico* donde, con ayuda de las matemáticas construimos un modelo teórico que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, podemos situar el *dominio pseudo- concreto* en el que podemos trabajar con los alumnos por medio del material.

En el dominio pseudo-concreto el alumno ya ha salido de la realidad y trabaja con una situación, que siendo ya abstracta e idealizada, permite "concretar" y dar significado a los conceptos y símbolos característicos del dominio teórico, e incluso prescindir de determinados símbolos y representaciones formales que a ciertas edades pueden dificultar más que facilitar la comprensión de los alumnos.

Ejemplo

Cuando el alumno trabaja sólo con papel cuadriculado, prescinde de posibles valores no enteros para los lados de los rectángulos. También supone que todos los cuadros de la cuadrícula son perfectamente cuadrados, prescindiendo de posibles irregularidades. Al mismo tiempo conserva la denominación rectángulo, cuadrado para los resultados de sus dibujos, que pudieran no ser perfectamente regulares. El papel didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir implícitamente el modelo teórico a los alumnos, incluso aunque su formulación matemática formalizada no sea posible.

14. Analizar qué simplificaciones de la realidad se hacen para resolver el problema propuesto con cada uno de los materiales sugeridos en el ejemplo anterior. Describir la actividad matemática que se lleva a cabo en el trabajo con cada uno de dichos materiales.

En definitiva, el trabajo con material es muy importante en las primeras etapas de la educación matemática. Las metáforas de "manipular y ver los objetos matemáticos" son esenciales para la comprensión matemática.

4.3. Algunas precauciones

Como toda metáfora, el uso del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas resalta unos aspectos de los conceptos que tratamos de enseñar y ocultan otros, por lo que debemos prestar una atención cuidadosa en su uso.

Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con “polígonos” o “poliedros” de plástico), en cierta forma “manipulamos” y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figurales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales que Fischbein[5] denomina *conceptos figurales*, los cuales “reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección” (p. 143).

[5] Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24: 139-162.

Ejemplo

El borde de una cara de una moneda, o de la esfera de un reloj NO es una circunferencia, aunque solemos decir “este borde tiene forma de circunferencia”

La circunferencia es un objeto matemático idealizado que no existe en el mundo real. Es una abstracción o generalidad que surge cuando encontramos muchos ejemplos de formas tales como ruedas, relojes, mesas, camilla, etc.

Matemáticamente se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo", o el conjunto de pares de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Posiblemente si comprobamos esta propiedad en cada uno de los ejemplos anteriores nunca se cumple con exactitud, aunque sí de una forma aproximada.

En el ejemplo anterior, sin embargo, hablamos de “circunferencia” para referirnos a estas múltiples formas y también en frases como “el área interior de la circunferencia”, “longitud de la circunferencia", “polígono inscrito a la circunferencia”, etc.

Por tanto la expresión "concepto de circunferencia" es signo de un sistema de prácticas actuativas y discursivas asociada a cierta clase de situaciones problemáticas o descripciones del entorno tal como ya hemos comentado en el capítulo 1. Los objetos matemáticos (técnicas y estructuras conceptuales) provienen de sistemas de prácticas ante tipos de tareas, y no sólo por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos[6].

Ejemplo

Si sólo consideramos el "cuadrado" como el concepto geométrico que resulta por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos que podemos encontrar en nuestro entorno, entenderemos el cuadrado como la figura formada por cuatro lados iguales y con los cuatro ángulos de 90º, pero no podemos entender el "cuadrado" como "construcción geométrica" ni podemos construir el cuadrado a partir de la diagonal o bien a partir del lado. En cambio si manipulamos con un programa informático como el Cabri y realizamos las siguientes construcciones: 1) construcción de un cuadrado a partir de un lado y 2) construcción de un cuadrado a partir de la diagonal el alumno, por una parte, puede aprender y generalizar dos métodos de construcción de cuadrados y, por otra parte, el concepto de cuadrado que tiene el alumno queda enriquecido con la visión de que un cuadrado es el resultado de una construcción geométrica. Así mismo, en el contexto de la "geometría de la tortuga" (lenguaje Logo), la expresión REPITE 4 [AV 30 GD 90] es un cuadrado.

15. Con relación a los conceptos de “recta”, “ángulo”, “medida” analiza la diferencia entre el uso que se hace de estas palabras al trabajar con un material manipulativo o en la vida cotidiana y escolar, y el significado matemático de los términos.

Parte del problema señalado se explica porque con un mismo término del lenguaje nos referimos con frecuencia, tanto a objetos matemáticos abstractos, como a las situaciones concretas modelizadas por dicho concepto. Así, en la clase de matemática, y en los manuales escolares encontramos expresiones tales como:

“*Dibuja una recta, un ángulo, recorta un triángulo, muéstrame un plano, etc.*”

Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un ángulo. Lo que el alumno dibuja para realizar estas tareas es un trazo (objeto ostensivo

[6] Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, nº 3: 325-355.

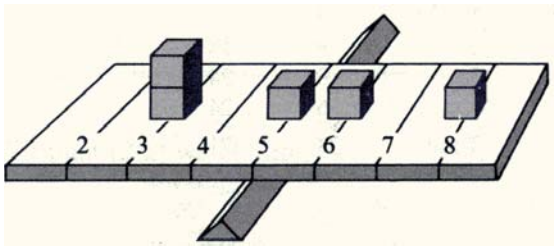
manipulable) que evoca o simboliza el concepto de recta, ángulo (objeto abstracto) correspondiente:

- La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos y representaciones gráficas que se hacen de ella.
- Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel. Es una forma controlada por su definición.

En consecuencia, un uso irreflexivo del material manipulativo podría constituir obstáculos para la apropiación efectiva del conocimiento matemático:

- Las acciones matemáticas son virtuales, imaginadas, no reales. Son acciones sobre objetos mentales, "materializados" mediante sistemas de signos específicos.
- El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades concretas del material manipulativo y los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades. Ello puede impregnar a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza.
- Al mismo tiempo, las manipulaciones puramente sintácticas y formalistas de los sistemas de signos verbales-textuales pueden ocasionar un aprendizaje memorístico, rutinario, desprovisto de sentido para los alumnos.
- Si no se es cuidadoso en separar el material manipulativo del objeto abstracto, el paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada, apoyada en sistemas de signos, puede estar no exento de conflictos.

16. Un tipo de material manipulativo usado para hacer comprensible la idea de media aritmética es una balanza, donde los datos se representan como pesos situados en diferentes posiciones de un tablero (cada dato se sitúa en la posición que indica su valor numérico) y la media es el punto de equilibrio de la balanza (en el ejemplo, el valor 5). ¿Qué conflictos piensas se podrían producir por un uso inadecuado de este material?



4.4. Relación de los manipulativos con las situaciones didácticas

El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas. El material en sí es inerte, tanto si es tangible como gráfico-textual, y puede ser usado incluso de forma indeseable. Los aparatos físicos, ni tampoco los restantes manipulativos, ofrecen experiencia matemática inmediata en sí mismos. La actividad matemática se pone en juego por las personas enfrentadas a tareas que les resultan problemáticas.

Por tanto, lo que se debe considerar como recurso didáctico no es el material concreto o visual, sino la situación didáctica integral, que atiende tanto a la práctica como al discurso, de la que emergen las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas.

Ejemplos

> Un juego de ruletas puede usarse para trabajar el tema de la probabilidad; para estudiar la idea de sector circular y amplitud y medir diferentes amplitudes, o bien simplemente para hacer un sorteo de un premio en clase, pero sin conectarlo con la clase de probabilidad.
>
> Una calculadora puede usarse sólo para comprobar las operaciones realizadas primero con papel y lápiz, o bien como ayuda en el cálculo mental, o incluso para plantear la idea de redondeo, error absoluto y relativo.

En consecuencia el estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas o tareas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. Esta confrontación con situaciones-problemas, inductora de la actividad de matematización, contribuirá, además, a su formación integral como persona, objetivo final del proceso educativo.

Es importante también que el uso del material, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática. Usar manipulativos tangibles en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo.

Con frecuencia se defiende el uso de distintos sistema de representación para el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo las representaciones con material tangible. Pero como afirma Baroody[7], "desafortunadamente, no hay aún evidencia suficiente disponible para determinar qué modos de presentación son cruciales y qué secuencia de representaciones deberían usarse antes de introducir las representaciones simbólicas" (p. 5). Pensemos, por ejemplo, en la enseñanza a personas invidentes, las cuales pueden aprender cualquier contenido matemático sin el recurso a la percepción visual.

El juego de representaciones puede ser una condición necesaria, pero no suficiente para el aprendizaje matemático. La eficacia relativa de cada sistema de signos desde el punto de vista instrumental nos debe llevar a descartar algunos de estos sistemas y concentrar los esfuerzos en el dominio de herramientas con perspectivas de futuro.

Ejemplo

> El ábaco japonés, por ejemplo, es un instrumento de cálculo de extraordinaria eficacia para realizar cálculos aritméticos; compite incluso, una vez adquirida cierta destreza, con el uso de la calculadora. Pero se duda de su valor como recurso didáctico en los primeros niveles de enseñanza debido a sus convenciones particulares de representación de los números y la complejidad de su manipulación. Incluso el uso del ábaco ordinario, aunque es una herramienta excelente y útil, está lejos de ser el remedio para las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. "Es más que dudoso, por ejemplo, que el ábaco sea el mejor modelo -o siquiera bueno- para el aprendizaje de la multiplicación o la división"[8].

El uso del material dentro de una secuencia de situaciones didácticas por parte de los profesores debe estar basado en la reflexión sobre las siguientes preguntas:

- ¿Qué aprenden los alumnos tras un proceso de estudio basado en el uso de un material determinado?
- ¿De qué factores depende el estudio?

[7] Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with garantees. *Arithmetic Teacher* (October): 4-5.

[8] Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis. (p. 60).

- ¿Podemos aspirar en los niveles de educación obligatoria a que los alumnos adquieran determinadas destrezas en el manejo de sistemas de signos textuales?
- ¿Cuándo y de qué modo dejar de usar material tangible y pasar al textual?

5. RECURSOS TECNOLÓGICOS

Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada. Hay que tener en cuenta, no obstante, que la tecnología no se debería usar como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera que estimule y favorezca tales intuiciones y comprensiones más sólidas. Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse qué matemáticas deberían aprender los estudiantes, y cómo deberían aprender mejor. Pueden aparecer también algunas dificultades:

- Dificultades de aprendizaje del software o la calculadora si el alumno no está familiarizado con el mismo. Ello puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología. Por ello se recomienda usar recursos fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad matemática.
- Dificultad en aceptar datos de la calculadora u ordenador que no han obtenido personalmente. Por ejemplo, algunos alumnos se resisten a tomar como aleatorios los números obtenidos de una calculadora u ordenador, puesto que estos instrumentos siempre producen un resultado exacto y esto contradice la idea de aleatoriedad.
- Dificultad en diferenciar la estimación que proporciona la calculadora u ordenador del verdadero valor teórico; por ejemplo, en probabilidad, dificultad en diferenciar la estimación frecuencial de la probabilidad, obtenida mediante la tecnología del verdadero valor teórico de la probabilidad; en el estudio de las funciones, dificultad en distinguir el límite teórico de una estimación discreta del mismo; en general dificultad de diferenciar lo discreto y lo continuo al trabajar con la tecnología.

5.1. Calculadoras

Las calculadoras y los ordenadores se consideran actualmente como herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y la construcción de las matemáticas. "La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (NCTM, 2000).

Estos recursos han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo dedicar más tiempo a tareas interpretativas y eliminando temas, como el cálculo de logaritmos a los que se destinaba mucho tiempo hace unos años.

5.2. Ordenadores

Han sido principalmente los ordenadores los que están cambiando la manera de enseñar matemáticas, debido principalmente a la revolución que hizo que los ordenadores estuvieran a disposición de un mayor número de usuarios, y al desarrollo del lenguaje natural en el manejo del software que hizo accesible su uso.

Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios estudiantes en las distintas áreas de matemáticas: geometría, estadística, álgebra, medida y sistemas numéricos. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la matemática y tienen oportunidad de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés. Podemos diferenciar los siguientes tipos de software para la enseñanza:

1. *Lenguajes de programación.* En las primeras experiencias de enseñanza, una opción era que los alumnos escribieran sus propios programas de ordenador, por ejemplo en lenguaje LOGO. Esta opción hoy día apenas se usa, aunque todavía encontramos en Internet algunos micro-programas interactivos similares a LOGO.
2. *Paquetes profesionales*. Existe una gran variedad de ellos, como por ejemplo *SPSS, o Mathematica,* tan sólo se usan en la universidad y en pocos casos en los últimos cursos de enseñanza secundaria.
3. *Software didáctico.* Debido a la complejidad de los programas profesionales algunos investigadores han realizado adaptaciones de ellos a lo que generalmente se requiere en la clase o han construido su propio paquete didáctico. Un ejemplo es *Fathom*, un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria que incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, trazar funciones e importar datos desde Internet. Otro ejemplo es el programa *Clic* que se usa fundamentalmente para diseñar paquetes educativos para la etapa de educación primaria.
4. *Micromundos*. Estos consisten en grupos de programas que sirven para estudiar conceptos particulares. Ejemplos particulares son muchos de los programas interactivos preparados con relación a los estándares del NCTM y que están disponibles en Internet. Entre estos micromundos destaca el programa Cabri que está especialmente pesnsado para su aplicación a la geometrías

5. *Software de uso general*, como por ejemplo las hojas de cálculo, *EXCEL, LOTUS,* etc, que son aplicadas en diversas experiencias de clase y brindan un amplio espectro de posibilidades en la enseñanza de conceptos estadísticos, proporcionalidad, o funciones.

Los programas informáticos llamados de "propósito general" como los procesadores de texto, hojas de cálculo, etc. son programas que están disponibles en casi todos los ordenadores y que pueden ser muy útiles para trabajar diferentes contenidos matemáticos. Por ejemplo con el programa WORD o con el PAINT podemos trabajar contenidos geométricos como los frisos y mosaicos, mientras que con la hoja de cálculo podemos trabajar aritmética, estadística y probabilidad.

Con relación a la hoja de cálculo hay que destacar los siguientes aspectos: 1) Permite la representación de la información en formato numérico y gráfico y en un formato semialgébrico -si se utilizan fórmulas. 2) La interacción del alumno con una hoja de cálculo le obliga a ser preciso y metódico, 3) La hoja de cálculo produce una variación en "tiempo real". Cada una de las acciones y decisiones que realiza el alumno tienen una respuesta inmediata en la pantalla del ordenador. 4) La hoja de cálculo asume la realización de cálculos matemáticos que pueden ser complicados o "pesados" para el alumno, y le permite dedicar sus esfuerzos a otros objetivos.

6. *Tutoriales*, que son programas desarrollados para la enseñanza personalizada de los estudiantes y para la evaluación.

5.3. Internet

El enorme potencial de esta tecnología y la rapidez con que su uso se está generalizando es especialmente visible en la educación. Destacan entre otras las siguientes posibilidades:

- *Correo electrónico:* que permite enviar y recibir mensajes a través del ordenador y los sistemas de comunicación asociados. Puesto que los mensajes pueden contener documentos de texto o gráficos u otro material informático adosados, posibilita la tutoría a distancia y el trabajo conjunto de profesor y alumnos o varios alumnos, incluso a distancia
- *Listas de distribución y discusión* por correo electrónico, que permiten enviar un mismo mensaje a toda una lista de personas en forma instantánea y podemos utilizar tanto con nuestros alumnos como para intercambiar ideas o soluciones a problemas con otros profesores.
- *Sociedades:* El numero de asociaciones educativas y de profesores de matemáticas que construyen sus propias páginas, con información sobre sus actividades y desde las cuales podemos acceder a recursos útiles para la enseñanza de las matemáticas, es cada día creciente.
- *Revistas y boletines:* la revista electrónica constituye una nueva filosofía en la difusión del conocimiento. Por un lado, acorta todo el proceso desde que se remite un trabajo hasta que se publica, y la difusión es potencialmente mucho mayor, pues no hay costes de distribución implicados, por lo que, generalmente, estas revistas se distribuyen libre de coste. No sólo encontramos revistas para los profesores de matemáticas, sino también para los alumnos.
- *Software:* También hay software disponible en Internet y algunos programas pueden cargarse directamente o bien ser solicitados a través de correo electrónico. En otros casos podemos usar cierto software "a distancia". De este modo, Internet suprime las barreras de compatibilidad o de limitaciones de memoria y pone a nuestra disposición el uso "on-line" de otros medios informáticos.
- *Otros recursos didácticos*: incluyen, conjuntos de datos para el trabajo en la clase de estadística, juegos y pasatiempos matemáticos, libros de texto interactivos, notas sobre historia de las matemáticas, etc.

5.4 Video

Actualmente se pueden encontrar videos didácticos que tratan muchos de los contenidos matemáticos de la educación primaria -por ejemplo, la colección *Ojo Matemático*. Si bien el video permite tratar los contenidos de una manera muy diferente a como lo hace un libro de texto puede resultar una actividad muy pasiva para los alumnos. Algunos consejos generales que conviene tener en cuenta son:

1) Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. Se necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos.
2) No hay que caer en la tentación de querer proyectar todo el video en una sola sesión. Los chicos no tienen la misma retentiva que los adultos, o la que desarrollan cuando van al cine. No hay que sustituir la clase con un video, sino que hay que aprovechar partes del mismo para enriquecer la enseñanza.
3) Hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de ver el segmento del video.
4) No es conveniente apagar las luces.

6. JUEGOS

Otro recurso que conviene tener presente son los juegos, sobretodo por su papel motivador. Una de las clasificaciones sobre los juegos es la que considera por una parte los juegos de conocimiento en los que hay que poner en funcionamiento un determinado contenido matemático de la enseñanza primaria y, por otra parte, los juegos de estrategia en los que hay que encontrar la estrategia que permite ganar el juego

> 17. Clasifica los juegos siguientes como juegos de conocimiento o de estrategia. Para cada uno de ellos comenta el conocimiento que hay que poner en funcionamiento o la estrategia ganadora.
>
> - Escondite
> - Parchís
> - La carrera del 20. Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor. Gana el jugador que dice 20 por primera vez[9].

7. DOS POSICIONES EXTREMAS: FORMALISMO Y EMPIRISMO

Los análisis de la actividad matemática llevados a cabo por distintos autores sugieren el importante papel de los medios expresivos para el desempeño de tal actividad, la cual, aunque es esencialmente mental, se apoya en la acción sobre tales instrumentos semióticos. Estos análisis apoyarían, por tanto, el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza siempre que tales recursos sirvieran de apoyo ostensivo para la reflexión matemática y no la limiten.

En las secciones anteriores hemos enfatizado una cierta precaución respecto del uso ingenuo de los manipulativos tangibles. Pero esa actitud es igualmente aplicable

[9] Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori (p. 222).

respecto del uso de los manipulativos gráfico-textuales. En general el empleo de los instrumentos semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede caer en dos posiciones extremas:

- *el formalismo*, consistente en un uso exclusivo y prematuro de símbolos formales - con la consiguiente pérdida por parte del alumno del significado fenomenológico de la actividad matemática (conexión con las situaciones- problemas);
- *el empirismo*, esto es, el uso abusivo de materiales tangibles, incluso cuando ya la edad y comprensión del alumno no los hace necesarios, con la consiguiente pérdida del sentido discursivo de la actividad matemática (conexión con la actividad de generalización y abstracción) .

Para superar ambos sesgos se requiere implementar una dialéctica compleja entre los distintos tipos de símbolos y materiales ostensivos que promueva la actividad reflexiva del alumno. Esto precisa un gran esfuerzo de investigación para dilucidar qué materiales usar, cuándo, cómo, con quién, así como sobre las conexiones que se deberían establecer entre los manipulativos tangibles, orales y gráfico-textuales, entre las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas y las situaciones-problemas que resuelven y organizan tales estructuras.

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

(1) A continuación se presenta un extracto de un documento curricular sobre el uso de recursos en el aprendizaje significativo de las matemáticas.

1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
2) ¿Qué papel juega el uso de recursos en el aprendizaje significativo según este documento?

Extracto del documento: Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas en primaria (MEC)

Señalamos a continuación algunos **aspectos que favorecen el aprendizaje significativo:**

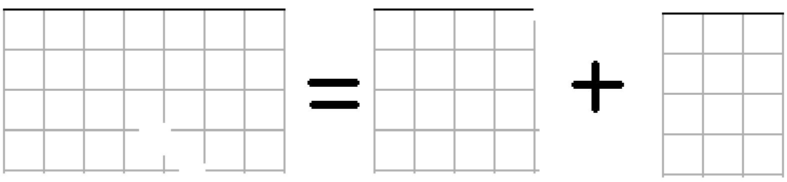
* Atiende a la diversidad del alumnado, tanto en sus experiencias previas y sus estrategias personales de aprendizaje como en sus capacidades, ya que la actividad puede abordarse de maneras distintas: pueden hacerlo de forma verbal, otros de forma manipulativa o gráfica, etc. La participación de cada niño en la elaboración de conjeturas y la verbalización garantizan la diversidad de enfoques y de lenguajes.
* Plantea un aprendizaje funcional y significativo al considerar la conveniencia de partir de los intereses de los niños y las niñas, y de situaciones reales para establecer relaciones con sus conocimientos anteriores y elaborar conjuntamente definiciones y generalizaciones.
* Permite también integrar conceptos, procedimientos y actitudes en una misma secuencia de aprendizaje, ya que, a través de procedimientos, es decir de “hacer” alguna cosa, ya sea contar, clasificar, representar, etc., se llega a sacar conclusiones y a generalizar, y con ello a los conceptos; sin olvidar que las actitudes de participación, gusto por el trabajo, por la precisión, etc., se adquieren simultáneamente.

Difícilmente se pueden garantizar estas condiciones en una secuencia en la que se empieza por la definición, se pasa a exponer algunos ejemplos y después se presentan ejercicios para practicar. Éste es un planteamiento que, por desgracia, es muy frecuente todavía en nuestras escuelas, y que sólo garantiza la uniformidad, que relaciona poco o nada los aprendizajes con las situaciones de la vida diaria y que fomenta actitudes muy negativas frente a la matemática.

2. ANÁLISIS DE ACTIVIDADES Y LIBROS DE TEXTO

(2) Examina en un libro de texto de primaria si se incluyen actividades que requieran el empleo de materiales manipulativos.

(3). En una clase la maestra ha utilizado papel cuadriculado de la siguiente manera:



$4\cdot 7$ $4\cdot(4+3)$ = $4\cdot 4$ + $4\cdot 3$

¿Qué contenido matemático se está trabajando en esta actividad?

(4) Explica como y con qué material justificarías a un alumno de primaria la propiedad asociativa 2·(3·5) = (2·3)·5

(5) Utilizando el plegado de papel:

a) Trazar la perpendicular por un punto A a una recta r.

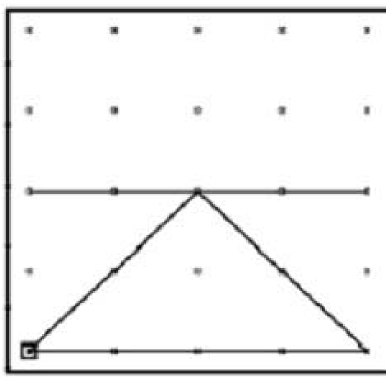
b) Trazar la paralela por un punto A a una recta r.

c) Trazar la bisectriz de un ángulo.

d) Construir un pentágono regular.

(6) ¿Cuál es el objetivo de la siguiente actividad?¿Crees que el uso del geoplano permite realizar esta actividad en el primer ciclo de primaria?

En un geoplano de 5x5 construye el triángulo de la siguiente figura y su simétrico respecto de la línea horizontal



(7) En un libro de texto se propone el siguiente método para dibujar un diagrama de sectores.

a) Explica por qué este procedimiento es correcto.

b) Explica cómo se puede determinar el centro del círculo

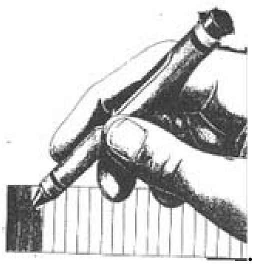
c) Busca en un libro de texto el procedimiento normal para dibujar un diagrama de sectores. ¿Qué tipo de contenido matemático se evita utilizando este procedimiento?

d) ¿Qué tipo de material se evita utilizando este procedimiento?

Para dibujar un gráfico de sectores para esta tabla de datos, has de seguir los pasos siguientes:

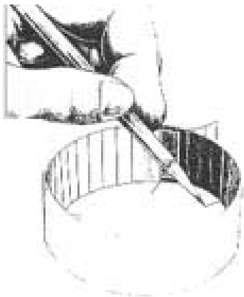
Edad	*Frecuencia absoluta*
7	*3*
8	*2*
9	*3*
10	*4*
11	*6*
12	*2*
Total	*20*

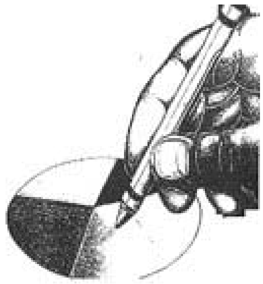
1) Coge una tira de cartulina de 24 cm de largo por 5 cm de alto. Dibuja 20 rectángulos de base 1 cm. A continuación pinta 3 de color azul, 2 de color verde, 3 de color amarillo, 4 de color negro, 6 de color rojo y 2 de color marrón.



2) Une con pegamento los extremos de la tira de cartulina, de manera que los 4 rectángulos sin colorear queden por detrás de los segmentos coloreados y la tira forme un anillo con los colores hacia adentro.

3) En una hoja se traza una circunferencia utilizando la tira del apartado anterior. Marca el principio y el final de cada color





4) Determina el centro de la circunferencia y une las marcas con el centro. Por último colorea cada sector con el color correspondiente.

3. EL MATERIAL MANIPULATIVO COMO PUENTE ENTRE LA REALIDAD Y LOS OBJETOS MATEMÁTICOS[10]

(8) A continuación tienes una secuencia de actividades que permite modelizar una situación "real". El modelo matemático se corresponde con el currículum de la ESO, pero la utilización de un programa de geometría dinámico como el Cabri permite considerar la posibilidad de utilizar esta secuencia de actividades con alumnos de primaria. Después de leer las actividades y de pensar cómo las podría resolver un alumno de primaria, contesta:

a) ¿Qué situación "real" se está modelizando?

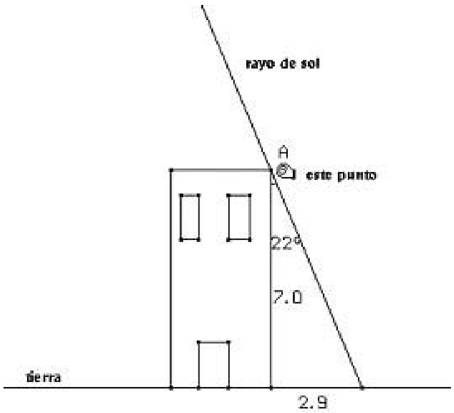
b) ¿Qué contenido matemático sirve para modelizar está situación "real"?

c) El contenido del apartado anterior, ¿con qué notación se representa en la ESO?

d) ¿Es adecuado introducir el contenido del apartado b en primaria? ¿Y la notación que lo representa en la ESO?

e) ¿Crees que la secuencia de actividades que sigue es apropiada para alumnos de 6º de primaria?

1. La figura de la pantalla del ordenador es un edificio de 7 m de altura que tiene una sombra de 2,9 m. Si sitúas el puntero del ratón en el punto A y lo mueves hacia arriba y hacia abajo, observarás cómo aumenta o disminuye la altura del edificio. ¿Qué le ocurre a la sombra del edificio al aumentar su altura? ¿Y si disminuye la altura?



2. La figura anterior nos permite observar la sombra que tienen, a la misma hora, edificios de alturas diferentes.

a) Completa la siguiente tabla:

Altura (m)	Sombra (m)
4	
8	
12	
16	

b) Si doblamos la altura de un edificio, ¿qué le pasa a su sombra? ¿Y si la triplicamos? ¿Y si la cuadriplicamos?

[10] Font, V. (1996). *Incidencia del micro-mundo Cabri-géomètre en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad de magnitudes. Un ejemplo de su utilización en el aula.* (Comunicación presentada en el ICME-8, Sevilla).

d) Divide cada altura por su sombra. ¿Observas alguna relación entre las alturas de los edificios y sus sombras?

e) Variando la posición del punto A de la pantalla anterior, resuelve el siguiente problema: " Juana ha medido, a la misma hora, algunos objetos (árboles, edificios, monumentos, etc.) y sus sombras, pero no ha tenido tiempo de hacer todas las mediciones. Completa la tabla de Juana."

Altura de los objetos (m)	Sombras (m)
3,5	....
7	2,9
....	5,8
21	8,7

4. CALCULADORAS

(9) Describir algunos de los beneficios de usar calculadoras en las clases de matemáticas. ¿Cuáles son algunos de los argumentos que suelen decirse en contra del uso de calculadoras en la enseñanza de la aritmética?

(10) Después de efectuar las siguientes restas con la calculadora: 9-1, 98-21, 987-321, 9876-4321, 98765-54321, haz una predicción del resultado de las restas 987654-654321 y 9876543-7654321 y da una justificación de esta predicción.

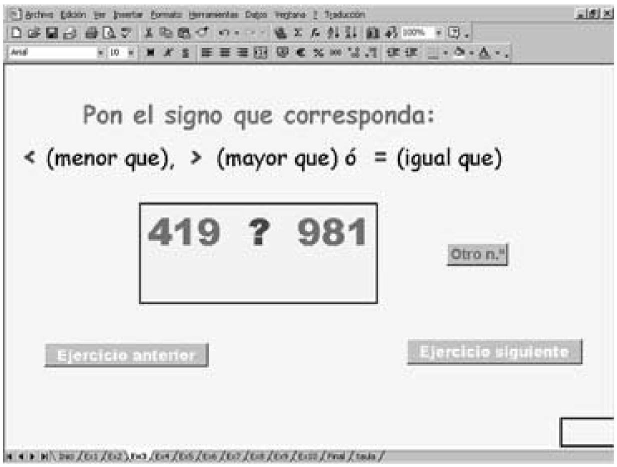
(11) Las calculadoras tienen posibilidades que podríamos calificar como "lúdicas" o "curiosidades". Un ejemplo lo tenemos en actividades como la siguiente en las que la última respuesta se obtiene girando 180º el resultado de la pantalla de la calculadora a la pregunta anterior:

> *Un camión que transporta 1725,23 kg de naranjas, ha perdido 16,5 kg por el camino. ¿Cuántos kg de naranjas tiene aún el camión? ¿Qué es imprescindible para escribir esta respuesta?*

5. PROGRAMAS INFORMÁTICOS

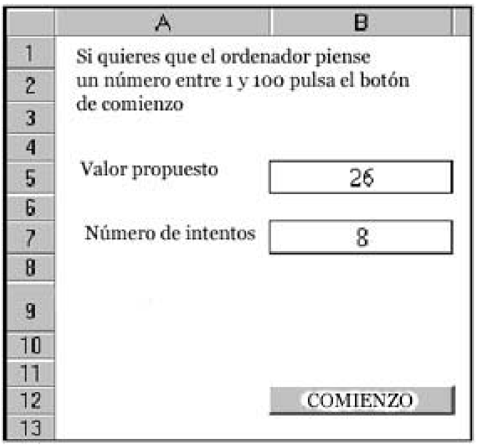
(12) Estudia estas actividades basadas en el uso de una Hoja de Cálculo desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer el ejercicio con lápiz y papel.

1) *Aritmética*. En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger entre tres posibilidades. Si escoge la correcta el ordenador contesta Muy Bien. Si la elección no es la correcta el ordenador contesta que vuelva a intentarlo. Con el botón *Otro n.º* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes. Las opciones *Ejercicio anterior y siguiente* permiten pasar a actividades más fáciles o más difíciles.



2) *Cálculo mental:* En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger un número entre 1 y 100. Si este número coincide con el que ha pensado el ordenador recibe la siguiente respuesta: Has acertado. Si el número es menor o mayor el ordenador responde indicándolo. El ordenador también cuenta los intentos. Con el botón *Inicio* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes.

Comenta esta actividad desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas e inconvenientes de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer este juego sólo con cálculo mental. ¿Cuál es la estrategia que hay que seguir?



3) Confecciona una hoja de cálculo que permita rsolver por tanteo el problema propuesto en la actividad 10

6. INTERNET

(13) Visita las siguientes páginas web y explora los recursos disponibles para la enseñanza de las matemáticas en primaria:

http://www.pangea.org/~acte/sebas/Volta%20Espanya/castella.htm

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/vlibrary.html

http://illuminations.nctm.org/index2.html

(14) Busca en Internet páginas que tienen por objetivo el intercambio por Internet de problemas de matemáticas entre escuelas, el aprendizaje cooperativo, etc.

BIBLIOGRAFÍA

Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, 7, 71-80.

Coriat, M. (2001). Materiales didácticos y recursos. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 61-82). Madrid: Síntesis.

Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: Los videos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 13, 29-44.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

Marín, M., España, A. y Cruz, C. (1994). Telematemáticas. *Suma*, 14-15, 65-68.

Udina, F. (1989): *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Eva Cid
Juan D. Godino
Carmen Batanero

Índice

CAPÍTULO 5:
NÚMEROS Y EXPRESIONES DECIMALES

CAPÍTULO 6:
NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 1:

NÚMEROS NATURALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El estudio de los sistemas numéricos, incluyendo su uso en las diversas situaciones de la vida diaria, ha sido históricamente una parte esencial de la educación matemática desde los primeros niveles. Esto es así porque todas las matemáticas que se estudian desde preescolar hasta el bachillerato están cimentadas en los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales y reales). Los principios que fundamentan la resolución de ecuaciones son los mismos que las propiedades estructurales de los sistemas numéricos. De igual modo las medidas de magnitudes no son otra cosa que números y los datos estadísticos son en la mayoría de los casos información numérica contextualizada. Esto explica que la comprensión de los números, de las operaciones aritméticas y la adquisición de destrezas de cálculo formen el núcleo de la enseñanza de las matemáticas en la educación infantil y primaria. Los estudiantes deberán enriquecer progresivamente su comprensión de los números; esto implica saber qué son los números, como se representan con objetos, símbolos numéricos o sobre la recta numérica, cómo se relacionan unos con otros, el tipo de estructura que forman, y cómo se usan los números y las operaciones para resolver problemas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Números naturales
2. Sistemas de numeración decimal

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

Actitudes

1. Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.
2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Entre los objetivos generales que hacen referencia al estudio de los "Números y operaciones" se indica que, al finalizar la Educación Primaria, como resultado de los aprendizajes realizados en el área de Matemáticas, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas susceptibles de ser analizados con la ayuda de códigos y sistemas de numeración, utilizando las propiedades y características de éstos para lograr una mejor comprensión de los mismos y encontrar soluciones pertinentes.

2. Utilizar su conocimiento de los principales sistemas de numeración (decimal, romano...) para interpretar, valorar y producir informaciones y mensajes numéricos sobre fenómenos conocidos.

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

1. Números naturales.

• Necesidad y funciones: contar, medir, ordenar, expresar cantidades o particiones, codificar informaciones, distinguir objetos y elementos, etc.

• Relaciones entre números (mayor que, menor que, igual a, diferente de, mayor o igual que, menor o igual que, aproximadamente igual) y símbolos para expresarlas.

2. Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos y tiempo.

• Grafía de los números en los distintos sistemas.

• Base, valor de posición y reglas de formación de los números en los diferentes sistemas.

• Números cardinales y ordinales.

• Relaciones entre sistemas de numeración.

Procedimientos

1. Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada.

2. Interpretación de tablas numéricas y alfanuméricas (de operaciones, horarios, precios, facturas, etc.) presentes en el entorno habitual.

4. Elaboración y utilización de códigos numéricos y alfanuméricos para representar objetos, situaciones, acontecimientos y acciones.

Actitudes, valores y normas

1. Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números

2. Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza numérica apreciando la utilidad de los números en la vida cotidiana.

3. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Las orientaciones curriculares del NCTM proponen que la educación matemática, con relación al bloque temático de "Números y operaciones", debe desarrollar el "sentido numérico" en los estudiantes. Los componentes del sentido numérico, que se deben lograr de manera progresiva desde los niveles de preescolar hasta secundaria, se describen con tres estándares generales. El primero de ellos es comprender los números, las distintas maneras de representarlos, las relaciones entre los números y los sistemas numéricos. Sobre este objetivo propone el logro de las siguientes expectativas para los Grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria):

- contar con comprensión y reconocer "cuántos hay" en conjuntos de objetos;
- usar múltiples modelos para desarrollar una comprensión inicial del valor de posición y el sistema de numeración de base diez;
- desarrollar la comprensión de la posición relativa y magnitud de los números, de los aspectos cardinal y ordinal y sus conexiones;
- desarrollar un sentido de los números naturales, representarlos y usarlos de manera flexible, incluyendo la relación, composición y descomposición de los números
- conectar las palabras números y los numerales con las cantidades que representan, usando diversos modelos físicos y representaciones.

Para el nivel 3-5 se espera que los niños sean capaces de:

- comprender la estructura del valor de posición del sistema de numeración decimal y ser capaz de representar y comparar números naturales y decimales;
- reconocer representaciones equivalentes para los mismos números y generarlos mediante composiciones y descomposiciones de otros números;

Ejercicio:
1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. El sentido numérico y su desarrollo

Desde los niveles de preescolar uno de los objetivos básicos de la educación matemática será el desarrollo progresivo del "sentido numérico", entendido como "una buena intuición sobre los números y sus relaciones", que debe desarrollarse gradualmente como resultado de explorar los números, usarlos en una variedad de contextos, y relacionarlos entre sí, superando el limitado aprendizaje de los algoritmos tradicionales. "El sentido numérico se concibe como una forma de pensar, por consiguiente no es una "lección" en el currículum de las matemáticas de Primaria, sino una manera de aproximarse al trabajo con los números en el aula" (Llinares, 2001, p. 152).

La comprensión y dominio de los números naturales pone en juego muchas ideas, relaciones y destrezas, por lo que podemos considerarlo como un aprendizaje complejo, que no se desarrolla de manera simple y automática. Con la expresión 'sentido numérico' hacemos referencia al complejo de nociones y relaciones que configuran el 'sistema de los números naturales'. Incluye, por tanto, su origen en las actividades humanas de contar y ordenar colecciones de objetos, los instrumentos materiales inventados para dicha actividad, las operaciones y relaciones que se establecen entre ellas para la solución de problemas prácticos, y el propio sistema lógico–deductivo que organiza, justifica y estructura todos sus elementos.

El dominio intuitivo, flexible y racional de los números que caracteriza la apropiación del sentido numérico por parte del sujeto se inicia en preescolar, con las actividades de clasificación y ordenación de colecciones (uso de relaciones "más que", "menos que", "igual", ...), el aprendizaje de la secuencia numérica hasta la decena, y continúa desarrollándose en los niveles escolares posteriores trabajando con números más grandes, fracciones, decimales, porcentajes, etc.

2.2. El aprendizaje de la sucesión de palabras numéricas

El número natural surge como respuesta a la pregunta, ¿cuántos hay? o ¿qué lugar ocupa este elemento dentro de un conjunto ordenado? Se construye, por tanto, alrededor de su significado como cardinal y ordinal y para ello es necesario contar. Pero esto exige a su vez la memorización de tramos de la sucesión numérica cada vez más amplios. Además, se necesita también estar en condiciones de recitar cualquier tramo de la sucesión numérica para saber cuáles son los números anterior y posterior a uno dado y para desarrollar técnicas orales de suma y resta.

La memorización de la sucesión de palabras numéricas puede conseguirse por medio de situaciones de recitado o de recuento. Pero el recuento empieza siempre desde uno y no permite consolidar tramos altos de la sucesión. Por ejemplo, para aprender que después del novecientos noventa y nueve viene el mil no podemos contar desde uno, tendremos que recitar la sucesión numérica desde un novecientos y pico. Hay que tener en cuenta, además, que las dificultades mayores se encuentran en los cambios de decena, centena, millar, etc., por lo que es necesario ejercitarse en tramos de la sucesión que contengan alguno de estos cambios.

En el dominio del recitado de las palabras numéricas el alumno puede encontrarse en alguno de los niveles siguientes:

- *Nivel cuerda.* El alumno es capaz de recitar un trozo de la sucesión numérica por evocación. El sonido de lo que está diciendo trae encadenados los sonidos siguientes, pero el niño no separa una palabra de otra. Este conocimiento verbal no puede aplicarse al recuento al no distinguir donde acaba una palabra y empieza otra.

- *Nivel cadena irrompible.* El niño sólo es capaz de recitar la sucesión numérica si empieza por el uno, pero ahora ya diferencia las distintas palabras numéricas. En este nivel ya se pueden asumir tareas de recuento.

- *Nivel cadena rompible.* Aquí el alumno es capaz de "romper" la cadena comenzando a recitar a partir de un número distinto del uno.

- *Nivel cadena numerable.* El niño es capaz, comenzando desde cualquier número, de contar un número determinado de palabras, deteniéndose en la que corresponda. Por ejemplo, contar cinco números a partir del ocho y decir el número final, el trece. Desde este dominio se afrontan con bastantes garantías la realización de las operaciones básicas del cálculo.

- *Nivel cadena bidireccional.* Es el máximo dominio al que se puede llegar. Supone las destrezas del nivel anterior aplicadas al recitado de la sucesión numérica hacia delante o hacia atrás. Contar bien desde el número *a*, *b* números hacia atrás, tardando aproximadamente el mismo tiempo que hacia delante, es el tipo de tarea que define al alumno que ha alcanzado este nivel de dominio de la sucesión numérica.

Aunque estos niveles definen una progresión en el aprendizaje del recitado de la sucesión numérica, hay que entender que no todos los niños pasan por todos esos niveles y también que un mismo niño puede tener un nivel de dominio de un cierto tramo numérico y otro nivel distinto para otro tramo numérico. Es decir, un niño puede estar en un nivel de "cadena numerable" en el tramo del uno al diez y en un nivel de "cadena irrompible" en el tramo del diez al veinte. El aprendizaje de las palabras numéricas se va haciendo por tramos progresivos que se suelen consolidar en el siguiente orden: primero las palabras uno, dos y tres, después el tramo del uno al cinco seguido del tramo del cinco al diez. En fases posteriores los niños van consolidando los siguientes tramos: del diez al veinte, del veinte al cincuenta, del cincuenta al cien, del cien al doscientos, del doscientos al quinientos, del quinientos al mil, del mil al diez mil, del diez mil al cien mil, del cien mil al millón, del millón en adelante.

2.3. El aprendizaje del recuento y del significado del número como cardinal y ordinal

Los distintos estados de conocimiento de los niños sobre el significado del número pueden resumirse como sigue:

- *Percepción temprana de cardinales.* Los niños pequeños, entre dos y cuatro años, son capaces de reconocer el cardinal de conjuntos de uno a tres o cuatro elementos sin necesidad de contar. El cardinal es percibido globalmente por simple inspección visual del conjunto. En cambio, cuando se trata de cardinales mayores, los niños ya no saben decirlos correctamente porque eso exige contar y en esta etapa no tienen asumidos los principios en los que se basa dicha técnica.

- *Percepción prioritaria de ordinales.* Esta etapa corresponde a niños con edades entre tres y cinco años. Ahora los niños ya asumen algunos de los principios que permiten efectuar un recuento. En concreto, el principio del orden estable (las palabras numéricas deben decirse siempre en el mismo orden, empezando por el uno y sin omitir ninguna) y el de la correspondencia uno a uno (cada objeto del conjunto contado debe recibir una palabra numérica y sólo una)[1]. La práctica del recuento pone de manifiesto el sentido ordinal del número por cuanto la palabra numérica que se adjudica a cada objeto es su ordinal. Sin embargo, en esta fase no se asume el principio de cardinalidad, es decir, los niños no entienden que el último ordinal sea, al mismo tiempo, el cardinal de todo el conjunto. Para ellos, la respuesta a la pregunta, ¿cuántos hay?, consiste en la enumeración de todos los objetos de la colección.

- *Percepción prioritaria de cardinales.* En esta etapa, los niños, entre cuatro y siete años, asumen el principio de cardinalidad (la última palabra de un recuento indica, no sólo el ordinal del último elemento señalado, sino también el cardinal del conjunto) con lo que pueden responder correctamente a la pregunta ¿cuántos hay? después de haber efectuado un recuento. Pero al centrar su atención en los cardinales sufren una cierta regresión respecto a los ordinales y aparecen, por ejemplo, dificultades al obtener un ordinal. Se niegan a detener el recuento en el elemento en cuestión, ya que tienen muy claro el principio de la correspondencia uno a uno y pretenden adjudicar palabras numéricas a todos los elementos del conjunto. También tienen dificultades para reinterpretar un cardinal como ordinal, es decir, una vez que han dicho que diecisiete es el número de elementos de un cierto conjunto, les resulta difícil volver a entenderlo como el ordinal del último elemento señalado. Esto les impide, entre otras cosas, adoptar técnicas de contar a partir de uno de los sumandos para obtener una suma.

Una buena concepción[2] del número como cardinal y ordinal supone asumir la doble condición de cada palabra de un recuento como ordinal de un elemento y, a la vez, cardinal de los elementos contados hasta ese momento. Esto permite interpretar las palabras de un recuento numérico, bien como ordinales, bien como cardinales, en función del problema que haya que resolver.

En lo que se refiere a la técnica de contar, los errores que se observan pueden clasificarse en:

---

[1] Esto no quiere decir que los niños en esta etapa no cometan errores en el recuento. De hecho, las equivocaciones al contar son bastante frecuentes incluso en los adultos. Lo que quiere decir es que son razonablemente conscientes de los principios a los que nos acabamos de referir y procuran respetarlos al efectuar los recuentos.

[2] Una concepción es el conjunto de informaciones (conocimientos para la acción y saberes para la interacción social) que un individuo tiene acerca de una noción matemática.

- *Errores de recitado.* Errores ligados a un recitado incorrecto de la sucesión numérica, consistentes en: saltarse palabras numéricas, decirlas en otro orden, repetirlas, introducir palabras no numéricas, etc. Pueden deberse a que el niño no tiene asumido el principio del orden estable o a una memorización incorrecta del tramo numérico que recita.

- *Errores de coordinación.* Errores ligados a la falta de coordinación entre la emisión de la palabra y el señalamiento del objeto. Por ejemplo, el niño dice "cuatro" señalando dos objetos o dice "dos tres" señalando un único objeto. Pueden deberse al desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno, al hecho de no saber donde empiezan y acaban las distintas palabras numéricas (nivel cuerda del recitado) o a una falta de coordinación entre la emisión vocal y el movimiento de la mano.

- *Errores de partición.* Errores asociados al hecho de "no llevar la cuenta", es decir, de no distinguir correctamente lo ya contado de lo que falta por contar. Consisten en volver a contar un objeto ya contado o dejar objetos sin contar. Se producen por desconocimiento del principio de la correspondencia uno a uno o por una defectuosa puesta en práctica del mismo, debida al desconocimiento o mala utilización de las técnicas auxiliares del recuento (técnicas de diseño de un camino, marcado, separación o realización de una partición)

2.4. El aprendizaje del orden numérico

El orden numérico se construye alrededor de situaciones de comparación: comparación entre ordinales para decidir quién va antes y comparación entre cardinales para decidir a qué conjunto le sobran o faltan elementos cuando construimos parejas con un elemento de cada conjunto. Decimos que cinco es menor que ocho porque si un elemento es el quinto estará antes o será anterior en el tiempo al octavo (significado del orden entre ordinales). También decimos que cinco es menor que ocho porque si emparejamos cinco tazas con ocho platos quedarán platos sin taza (significado del orden entre cardinales). Esta última definición también lleva implícita la idea de que todos los conjuntos que tienen el mismo cardinal pueden emparejarse sin que quede ningún elemento sin pareja.

El orden numérico tanto en su sentido ordinal como cardinal es asumido muy pronto por los niños. En el caso de orden entre ordinales, el éxito a la hora de ordenar dos números va ligado a la memorización del tramo de la secuencia numérica que los incluye. El niño capaz de recitar del uno al diez ya puede decir, por ejemplo, que "el seis va antes que el nueve". Sin embargo, ese mismo niño puede no saber que quince es menor que diecisiete si no tiene memorizado el tramo del diez al veinte. La memorización de tramos cada vez más amplios de la sucesión numérica permite a los niños ampliar las parejas de números susceptibles de ser ordenadas. Finalmente, la familiarización con las reglas de formación de las palabras numéricas junto con el conocimiento de la escritura del número, conduce a los niños a asumir las reglas formales del orden numérico:

a) Un número es menor que otro si tiene menos cifras.

b) Si dos números tienen el mismo número de cifras, será menor aquel que tenga menor la cifra de orden superior.

c) Si las cifras de orden superior coinciden, se examinan las cifras de orden siguiente hasta encontrar algún caso en que no coincidan y entonces se aplica la regla b.

En cuanto al sentido cardinal del orden, en un primer momento los niños son capaces de percibir globalmente si en un conjunto hay más elementos que en otro, siempre que esa diferencia sea apreciable por simple inspección visual. Sin embargo, el establecimiento del orden entre los cardinales de dos conjuntos por medio del emparejamiento (construcción de parejas que contengan un elemento de cada conjunto) o del recuento no es una habilidad temprana; de hecho, hay niños de seis y siete años que, en esas condiciones, tienen dificultades para decidir qué conjunto tiene más o menos elementos.

A este respecto es esclarecedor el comportamiento de los niños en la llamada *experiencia de la conservación del número* propuesta por Jean Piaget. Consiste en lo siguiente:

- Se le presentan aun niño un número reducido de objetos, por ejemplo, entre seis y nueve fichas azules puestas en fila. A continuación, el entrevistador le pide al niño que ponga tantas fichas rojas como fichas azules hay, una ficha roja por cada ficha azul. Una vez que el niño ha emparejado cada ficha azul con una ficha roja, el entrevistador le pregunta si hay el mismo número de fichas azules que de fichas rojas. Si el niño dice que sí, el entrevistador modifica la fila de fichas rojas dejando una mayor distancia entre dos fichas. De esa manera, la fila de fichas rojas ocupa más espacio que la de fichas azules.

Después de eso, se pregunta al niño si ahora sigue habiendo las mismas fichas azules que rojas.

En la resolución de esta tarea los niños se comportan de las siguientes maneras:

- Algunos no saben colocar un número de fichas rojas igual al de fichas azules. No conocen la técnica de emparejamiento ni tampoco se les ocurre contar. Son niños que pueden tener una percepción global de dónde hay más o menos elementos, pero que no usan la correspondencia uno a uno para comparar cardinales.

- Otros son capaces de colocar un número de fichas rojas igual al de azules, están seguros de que los dos cardinales son iguales, pero cuando el entrevistador modifica una de las filas haciendo que ocupe más espacio dicen que en esa fila hay más fichas. Se trata de niños que son capaces de usar una técnica de emparejamiento para comparar cardinales de conjuntos, pero en cuanto visualmente ese emparejamiento desaparece dejan de verlo y vuelven a una comparación global basada en la percepción visual de que uno de los conjuntos ocupa más espacio.

- Por último, tenemos a los niños que a pesar de la modificación espacial efectuada por el entrevistador siguen afirmando que los dos conjuntos de fichas tienen el mismo número porque "no se ha puesto ni quitado ninguna ficha". En este caso, los niños no sólo son capaces de usar la correspondencia uno a uno entre conjuntos para comparar cardinales, sino que siguen "viéndola", aunque físicamente haya desaparecido, y no se dejan distraer por consideraciones de otro orden.

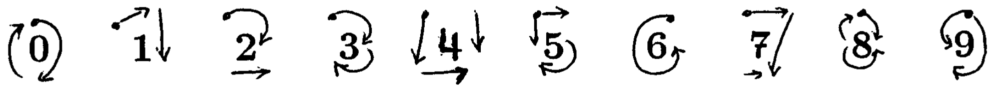
Lo más sorprendente de esta experiencia es que ha puesto de manifiesto que prácticamente todos los niños pequeños son "no conservadores" y que es necesario esperar a que tengan alrededor de siete años para que acepten mayoritariamente que el número de fichas sigue siendo el mismo.

Una última consideración a tener en cuenta es que la tarea de ordenar dos números es muy diferente de la de ordenar tres o más números. De hecho, se ha observado que niños que son capaces de ordenar tres números de dos en dos no son capaces de ordenarlos a base de decir cual es el menor, el mediano y el mayor. En una fase posterior se da también el caso de que, una vez ordenados ciertos números, el niño es incapaz de introducir en el lugar adecuado un número que se le ha dado posteriormente.

2.5. El aprendizaje del sistema escrito de numeración

El aprendizaje del sistema escrito de numeración se desarrolla en dos etapas: la de la lectura y escritura de las cifras (números del O al 9) y la de la lectura y escritura de números de dos o más cifras, lo que supone asumir las reglas de representación de números propias de un sistema posicional de base diez.

En lo que se refiere a las cifras, los niños deben aprender a reconocerlas y a escribirlas siguiendo el sentido de recorrido oportuno. Para las personas diestras los sentidos de recorrido más adecuados son los siguientes:



Los errores más frecuentes que se observan en el trabajo de los niños son:

- *Errores de inversión de la grafía.* Algunos niños confunden el 6 y 9; otros escriben ,

 en lugar de 2,  en lugar de 3,  en lugar de 5.

- *Errores caligráficos.* La mala caligrafía puede llevar a un niño a confundir sus propias cifras cuando tiene que volver a leerlas. Se puede confundir el 1 con el 2, el 3 con el 5, el 6 o el 9 con el 0, etc.

- *Errores de recorrido.* Es frecuente que los niños se acostumbren a escribir las cifras siguiendo recorridos anómalos. Esto contribuye a empeorar la caligrafía y, además, puede fomentar los errores de inversión ya comentados y la escritura de derecha a izquierda, en vez de izquierda a derecha, lo que crea problemas cuando hay que escribir números de varias cifras.

En cuanto al valor de posición de las cifras, diversas experiencias muestran que la comprensión que tienen los niños de ese convenio es muy limitada, incluso cuando llevan ya mucho tiempo escribiendo números de varias cifras. A continuación vamos a describir dos de esas experiencias.

Experiencia de Kamii sobre reconocimiento de la decena

- El entrevistador presenta a un niño dieciséis fichas y le pide que las cuente, las dibuje en un papel y escriba el número 16. Una vez hecho eso, el entrevistador rodea el 6 y le pide al niño que señale en el dibujo de las fichas lo que corresponde a ese número. Después rodea el 1 y le pide que señale en el dibujo la parte que corresponde a ese número.

Este experimento se realizó con niños de entre ocho y once años de edad (por supuesto, todos ellos escolarizados y sabiendo escribir números de varias cifras) y sus respuestas pueden clasificarse como sigue:

- Las cifras se interpretan como ordinales o como etiquetas: el 6 corresponde a una ficha y el 1 a otra ficha distinta (22%).

- El 6 representa seis fichas y el 1, una ficha (23%).

- El 6 representa seis fichas y el 1 es una decena, pero, a la hora de indicarlo en el dibujo, se señala una sola ficha (12%).

- El 6 representa seis fichas y el 1 las diez fichas restantes (43%.

Entre los niños de ocho años sólo el 20% relaciona el 1 con las diez fichas.

Experiencia de Ross del agrupamiento en decenas

- El entrevistador presenta al niño 48 alubias y 9 tazas. No le dice al niño cuántas alubias hay ni le pide que las cuente. Lo que le pide es que ponga diez alubias en cada taza. Una vez acabada la tarea sobre la mesa quedan 4 tazas llenas y 8 alubias sueltas. Entonces se pregunta al niño cuántas alubias hay en total.

Las respuestas de los niños (entre ocho y once años) fueron como sigue:

- No saben decir cuántas hay (5%).

- Las vuelven a contar todas de una en una (15%.

- Las cuentan por decenas ("diez, veinte, treinta, cuarenta") y al final añaden el ocho. Algunos niños multiplican diciendo "cuatro de diez son cuarenta" o "cuatro por diez son cuarenta"(80%).

Ningún niño dice directamente "cuarenta y ocho". Además, entre los niños de ocho años sólo el 60% cuenta de diez en diez, el otro 40% cuenta de uno en uno, o no cuenta.

Estas experiencias muestran que la noción del valor posicional de las cifras se va construyendo lentamente y que los niños aprenden a escribir números sin ser enteramente conscientes del valor que representa cada cifra. De hecho, los niños saben que cuarenta y dos se escribe con un cuatro y un dos porque los dos números empiezan por la sílaba "cua". Son las similitudes de los sonidos las que permiten escribir y leer correctamente números de dos cifras, más que una correcta interpretación del número en términos de decenas y unidades.

Los errores más frecuentes en la escritura de números de varias cifras son los siguientes:

- *Invertir el orden de las cifras.* Es propio de la escritura de números de dos cifras y consiste en intercambiar la cifra de las decenas con la de las unidades.

- *Incorporar la potencia de la base.* Consiste en escribir los números tal como se hablan, es decir, explicitando las potencias de la base, como sucede en nuestro sistema oral. Por ejemplo, tres mil doscientos veintitrés se escribiría como 300020023.

- *Suprimir o añadir ceros.* En números grandes con pocas cifras significativas es frecuente que los niños se equivoquen en el número de ceros intermedios que hay que escribir. Por ejemplo, mil cuatro puede aparecer escrito como 104 o como 10004.

Además, se observan dificultades de lectura y escritura de números muy grandes tanto en niños como en adultos debido a que la escuela no suele ejercitar a los alumnos en ello y, desde el punto de vista social, se trata de un conocimiento poco necesario.

2.6. Conocimientos previos a la enseñanza del valor de posición de las cifras

Para entender que el número treinta y cinco se escribe con un tres y un cinco hay que "verlo" descompuesto en tres decenas y cinco unidades. Pero eso exige saber que "diez más diez son veinte, y más diez son treinta", es decir, hay que saber contar de diez en diez y que cuando a una decena se le suma otra se obtiene la decena siguiente. Una vez entendido que tres decenas es lo mismo que treinta unidades, hay que estar familiarizado con el hecho de que treinta más cinco son treinta y cinco.

En otras palabras, para que un niño pueda darle sentido a los razonamientos que se organizan alrededor del valor de posición de las cifras tiene que estar familiarizado con determinadas técnicas orales de suma. Esto implica que las situaciones aditivas que estudiaremos más adelante deben comenzarse antes de enseñar la escritura de números de dos cifras.

Los conocimientos orales previos a dicha enseñanza son los siguientes:

- Contar de uno en uno y de diez en diez.

- Ser capaz de interpretar como cardinales u ordinales las palabras numéricas correspondientes a los números de dos cifras.

- Saber que si se suma una unidad se obtiene el número siguiente.

- Saber que si se suma una decena se obtiene la decena siguiente.

- Sumar oralmente decenas con unidades.

El aprendizaje de estos conocimientos puede conseguirse mediante situaciones de recitado, de recuento, de orden y aditivas. Pero además, se necesitan ciertos conocimientos de escritura. Son los siguientes:

- Manejar con bastante soltura el lápiz y el papel.

- Leer y escribir las cifras.

- Saber interpretar como cardinales y ordinales las cifras que aparecen en un mensaje escrito.

La adquisición de la primera de estas condiciones depende de la puesta en marcha de situaciones de manejo del lápiz y el papel que ayuden a desarrollar la psicomotricidad fina que la escritura requiere. Estas situaciones no son específicamente matemáticas por lo que no las hemos descrito. En cuanto a las otras dos condiciones, su aprendizaje se conseguirá por medio de las situaciones de trazado de cifras y de comunicación descritas en el apartado anterior.

Ejercicio 2: Diagnóstico de competencias y comprensión sobre cardinación y ordenación

En la tabla siguiente se incluye una relación de tareas de manipulación de objetos en situaciones aritméticas que se pueden usar para el diagnostico inicial (o la evaluación final) de las competencias y comprensión de los alumnos de 1er curso de primaria sobre cardinación y ordenación. Utiliza esta pauta con algún niño de dicho nivel. Compara tus resultados con la información dada en esta sección.

Manipulación de objetos en situaciones aritméticas

a) Contar el número de elementos de un conjunto.
A ver, ¿cuántas fichas tenemos aquí?, cuéntalas.
b) Construir un conjunto con un número dado de elementos
Vamos a coger 15 fichas. Venga, empieza,colócalas aquí.
c) Dados dos conjuntos, decir cuál de ellos tiene más o menos elementos.
Mira, aquí tenemos fichas negras y aquí fichas rojas. ¿Dónde hay más fichas?
d) Construir un conjunto que tenga el mismo número de elementos que otro dado.
Mira, aquí tenemos fichas rojas. Vamos a poner un número igual de fichas azules. ¿Cómo lo haremos?
e) Decir el ordinal de un elemento.
Vamos a hacer una fila de fichas. Ésta es la primera, ésta la segunda, ¿y ésta?
a) Colocar un elemento de ordinal dado
Mira, en esta fila hay que colocar esta ficha para que sea la cuarta, ¿cómo lo haremos?
g) Añadir elementos a un conjunto ya contado (con el conjunto inicial tapado o sin tapar)
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si añadimos estas otras, ¿Cuántas tendremos ahora?
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si añadimos estas 3, ¿cuántas tendremos ahora?
h) Quitar elementos a un conjunto ya contado (con el conjunto inicial tapado o sin tapar)
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si quitamos éstas, ¿cuántas tendremos ahora?
Aquí hemos contado 17 fichas, ¿verdad? Si quitamos 3, ¿cuántas tendremos ahora?
i) Adivinar el cardinal de un conjunto sabiendo su cardinal cuando se le añaden o suprimen elementos.
Mira, aquí tenemos unas fichas escondidas. No sabemos cuántas hay, pero yo sé que si añadimos 3 más, en total hay ocho. ¿Cuántas fichas hay escondidas?.
j) Modificar el ordinal de un elemento añadiendo o quitando elementos anteriores.
Mira, esta ficha está la quinta. Si ponemos delante estas otras dos, ¿ahora cómo estará?
Mira, esta ficha está la quinta. ¿Cuántas fichas se tienen que ir de la cola para que quede la tercera?
k) Comparar dos conjuntos y decir cuántos elementos más o menos tiene uno que otro.
Dónde hay más fichas, ¿aquí o aquí?, ¿cuántas más?
l) Comparar dos conjuntos diciendo cuántos elementos hay que añadir a uno de ellos para que se iguale con el otro.
Aquí tenemos 12 fichas azules y aquí 15 rojas. ¿Cuántas fichas azules tenemos que añadir para tener tantas como rojas?
m) Construir un conjunto que tenga un número determinado de elementos de más o de menos que otro ya dado.
Aquí tenemos 23 fichas. Vamos a hacer otro montón que tenga 4 fichas menos que éste.
n) Comparar dos ordinales, diciendo cuántos elementos hay entre los dos.
Si sabemos que esta ficha es la sexta y ésta la novena, ¿cuántas fichas tendremos que poner entre las dos?
ñ) Hacer torres de 10 elementos a partir de un número dado de elementos.
Hemos contado 25 fichas. ¿Cuántas torres de diez fichas podemos hacer? Vamos a hacerlas. ¿Cuántas fichas sobran?
o) Realizar acciones de compra-venta de objetos diversos
p) Contar objetos de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, de cien en cien , de mil en mil.
q) Recorrer la sucesión numérica escrita saltando de dos en dos, de tres en tres, etc., hacia delante y hacia atrás.
r) Reiterar acciones de añadir o quitar.
Aquí tenemos 3 fichas. Si añadimos otras 3, ¿cuántas tenemos ahora? ¿Y con 3 más?
Si de estas 22 fichas empezamos a quitar 3, y 3, y 3, ..., ¿cuántas quedarán al final?
s) Repartir un número dado de objetos entre un número dado de individuos.

Vamos a repartir estas 20 fichas en cuantro montones iguales. ¿Cuántas fichas hay en cada montón?
t) Repartir un número dado de objetos entre varios individuos de modo que a cada uno le corresponda un número dado de objetos.
Vamos a repartir estas 20 fichas en grupos de 5. ¿Cuántos grupos podremos hacer?
u) Dado cierto número de individuos, adjudicar a cada uno de ellos un número dado de objetos.
Vamos a hacer 4 montones de 5 fichas cada uno. ¿Cuánatas fichas necesitaremos?
v) Comprar-vender varios objetos de un mismo precio.
w) Construir conjuntos que tengan dos veces, tres veces, etc. más elementos que otro dado.
x) Construir conjuntos que tengan la mitad, la tercera parte, etc. que otro dado.
y) Formar todas las combinaciones posibles entre varios elementos.
Si tengo tres pantalones y dos camisas, ¿de cuántas maneras distintas me puedo vestir?
z) Medir longitudes, áreas, capacidades, masas con unidades no convencionales.

3. SITUACIONES[3] Y RECURSOS

3.1. Situaciones de recitado de la sucesión numérica

Las variables didácticas a manipular a la hora de proponer tareas de recitado y los valores entre los que varían, son los siguientes:

Tipo de sucesión oral: Cardinal u ordinal.

Números de comienzo y final del recitado: Cualquier número natural.

Sentido del recitado: Hacia delante o hacia atrás.

Número de términos del recitado: Con o sin control del número de términos que se recitan.

Salto: De uno en uno, de dos en dos (por pares e impares), de cinco en cinco (por los múltiplos de cinco), de diez en diez, de veinticinco en veinticinco (por los múltiplos de veinticinco), de cincuenta en cincuenta (por los múltiplos de cincuenta), de cien en cien, de doscientos cincuenta en doscientos cincuenta (por los múltiplos de doscientos cincuenta), de quinientos en quinientos (por los múltiplos de quinientos), de mil en mil, de diez mil en diez mil, de cien mil en cien mil, de un millón en un millón, etc.

Ejercicios:

3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio del recitado de la sucesión numérica

4. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de recitado de la sucesión numérica y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

[3] El término situación lo usamos con dos sentidos diferentes, como tarea o actividad matemática a realizar, y como situación didáctica. En este último caso, además de la tarea matemática propiamente dicha, se incluyen las intervenciones del profesor, las interacciones entre alumnos, el tiempo asignado y demás recursos utilizados en el estudio.

Las situaciones didácticas, globalmente consideradas, quedan determinadas por otras variables distintas de las correspondientes a las tareas, entre las que destacamos:

Forma de realizar la tarea: Individualmente, colaborando en grupo pequeño homogéneo, colaborando en grupo pequeño heterogéneo, colaborando en grupo grande, todos a la vez en grupo pequeño o grande.

Intervención del profesor: El profesor, una vez planteada la tarea, no contesta a ninguna pregunta, contesta sólo las preguntas que aclaran la consigna dada, hace sugerencias sobre cómo realizar la tarea, colabora con los niños en la resolución de la tarea, dice a los niños, bien personalmente o bien a través de otro niño, lo que tienen que hacer.

Tiempo de realización de la tarea: Se da el tiempo necesario para que todos los alumnos, todos menos unos pocos, la mitad de la clase, sólo unos pocos, realicen la tarea.

3.2. Situaciones de cardinalidad sin recuento

Es importante que los niños se acostumbren a determinadas configuraciones espaciales ("constelaciones") que permiten conocer el cardinal de un conjunto sin necesidad de contar. Por ejemplo, ante una constelación de puntos como la siguiente:

```
*   *
  *
*   *
```

los adultos no necesitamos contar para saber que ahí hay cinco puntos, pues estamos familiarizados con ella a través de los dados, las fichas del dominó y las cartas de la baraja. Las situaciones de cardinalidad sin recuento fomentan el reconocimiento visual de cardinales, habilidad necesaria en las tareas iniciales de suma y resta.

Las variables de las situaciones[4] de cardinalidad sin recuento son:

Numerosidad de la situación: De uno a veinte.

Sentido de la situación: De reconocimiento (del cardinal del conjunto) o de construcción (de un conjunto de cardinal dado.

Material utilizado: Dedos de las manos, dados, cartas de la baraja, fichas de dominó, regletas Cuisenaire, regletas con tapa, ábaco.

Ejercicios:

5. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la cardinalidad sin recuento.

6. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de cardinalidad sin recuento y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

[4] Situación, en el sentido de tarea o actividad matemática.

3.3. Situaciones de recuento: obtención de cardinales y ordinales

En general, la escuela no enseña a contar más allá de los primeros números. Se realizan actividades de contar para dar sentido a los números hasta el diez, pero a partir de ahí los números se construyen como combinación de decenas y unidades. Por ejemplo, treinta y cinco objetos aparecen descompuestos en tres decenas y cinco unidades, con lo que no hace falta contar más allá de diez para saber cuántos objetos son.

Nosotros entendemos que lo que da sentido al número como cardinal y ordinal es el recuento y que, por tanto, es necesario contar objetos una y otra vez para establecer el significado de los distintos números. Además, no basta con dar sentido a los números del uno al diez, sino que hay que realizar actividades de recuento que pongan a los niños en situación de manipular cardinales y ordinales de uno a cien y, en algunos casos, de más de cien objetos.

Por otra parte, también es necesario aprender las distintas variantes de la técnica de recuento. No es lo mismo contar para obtener un cardinal que contar para obtener un ordinal. En el primer caso hay que contar todos los elementos y no importa el orden en que se cuenten; en el segundo caso, sólo se cuenta hasta el elemento en cuestión y siguiendo un orden predeterminado de antemano. Además, la tarea de adjudicar a cada elemento una palabra numérica, y sólo una, puede exigir distintas técnicas auxiliares, dependiendo de la situación: seguir un camino, separar los objetos, marcarlos o efectuar particiones. Por último, el tamaño de la colección a contar o sus especiales características pueden propiciar el uso de recuentos abreviados: de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, etc. o, por ejemplo, contar grupos de cien y después contar de cien en cien para obtener el total, etc.

Las variables didácticas que intervienen en las situaciones de recuento son las siguientes:

Significado del número resultado del recuento: Cardinal u ordinal.

Numerosidad de la colección: De uno en adelante.

Sentido de la situación: De cálculo (del cardinal de un conjunto o del ordinal de un elemento) o de construcción (de un conjunto de cardinal dado o de un elemento de ordinal dado.

Tipo de objetos:

- Sucesos.

- Objetos movibles al alcance de la mano.

- Objetos al alcance de la mano, pero no movibles u objetos dibujados

    - con configuración geométrica típica

    - con configuración que indica un camino

    - con configuración indiferenciada.

- Objetos a la vista, pero no al alcance de la mano.

- Objetos evocados.

Salto: De uno en uno, de dos en dos, de cinco en cinco, de diez en diez, de veinticinco en veinticinco, de cincuenta en cincuenta, de cien en cien, de mil en mil, etc.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Ejercicios:

7. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la obtención de cardinales y ordinales.

8. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades obtención de cardinales y ordinales, y los valores de las variables didácticas correspondientes.

3.4. Situaciones de orden numérico

Las variables didácticas que intervienen en las situaciones de orden numérico son las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número mayor: De uno en adelante.

Tamaño de la diferencia: Grande (diferencia que permite ver de forma ostensible cuál es el conjunto de cardinal mayor), o pequeña (diferencia que obliga a emparejar o contar para decidir qué número es mayor.

Número de términos de la comparación: Dos, tres o más.

Grado de formalización de la situación: Contextualizada o formal

Uso de materiales: Con o sin manipulación de materiales.

Tipo de material:

- Objetos movibles al alcance de la mano y físicamente cercanos.

- Objetos movibles al alcance de la mano, pero físicamente separados.

- Objetos al alcance de la mano, pero no movibles u objetos dibujados

- Objetos a la vista, pero no al alcance de la mano.

Tamaño del material: Los dos conjuntos que se comparan están formados por objetos de un tamaño parecido o muy distintos en tamaño.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Institucionalización de las reglas formales que definen el orden: Con o sin explicitación de dichas reglas.

Dentro de las situaciones de orden numérico, son especialmente importantes aquellas que ponen de manifiesto el hecho de que dos conjuntos con el mismo cardinal pueden emparejarse sin que sobre ni falte ningún objeto. Una de ellas es la siguiente:

Situación fundamental[5] *de cardinalidad*

Condiciones materiales: El profesor debe situar en un lugar, cierto número de objetos A y en otro, cierto número de objetos B. Los objetos deben estar lo suficientemente separados para que el niño que esté cogiendo objetos B no tenga a la vista los objetos A. Además, el número de objetos A debe ser lo suficientemente grande para que el niño no pueda imaginárselos uno a uno.

Consigna del profesor dirigida al alumno: "Mira, aquí tenemos objetos A y allí objetos B. Tienes que ir a donde están los objetos B y traer un objeto B por cada objeto A que tenemos aquí".

Actuación del profesor: El profesor no debe permitir que el alumno haga pruebas, trayendo los objetos en varias veces. Debe exigir que los objetos se traigan en una sola vez y si el niño se equivoca debe llevarse todos los objetos y empezar de nuevo.

Conocimiento en juego: La resolución correcta de esta situación exige saber que cuando dos colecciones tienen el mismo cardinal, al emparejarlas ningún objeto se quedará sin pareja. Por tanto, si se cuenta la colección A para obtener su cardinal y se construye un conjunto de objetos B con el mismo cardinal, quedará resuelto el problema.

Ejercicios:

9. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio del orden numérico.

10. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de ordenación numérica y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.5. Situaciones de lectura y escritura de números de una cifra

La enseñanza de las cifras exige dos tipos de situaciones: las de trazado de las cifras y las de comunicación.

Situaciones de trazado de las cifras

Las variables didácticas a considerar serían las siguientes:

Tamaño de la cifra: Del 0 al 9.

[5] Se le llama así porque su resolución exige el conocimiento de la propiedad fundamental de los cardinales.

Método de trazado: Sobre cifra ya hecha o trazado libre imitando el modelo.

Instrumento utilizado: Dedos o lápices.

Material utilizado: Cifras recortadas en papel de lija, arena, talco, pintura de dedos, pinturas varias, papel, etc.

En un primer momento conviene que la tarea se realice individualmente y en presencia del profesor. Para ello, éste debe presentar al niño una cifra recortada en papel de lija y pegada en una cartulina o plancha de madera y mostrarle cómo recorrerla con el dedo. A continuación, el niño debe "hacer la cifra" varias veces, siguiendo el recorrido indicado por el profesor. De esta manera, y dado que el papel de lija raspa y obliga a los niños a ser conscientes del trazo que realizan, se van asumiendo los trazados de las distintas cifras. Posteriormente, se puede pedir al niño que dibuje la cifra por sí mismo con el dedo sobre arena o con pintura de dedos sobre papel. Más adelante, se le puede decir que la trace con lápiz y papel.

Hay que tener en cuenta que en las situaciones de trazado de las cifras no se pretende que el niño identifique la palabra con el símbolo escrito; no son, por tanto, situaciones estrictas de lectura y escritura de cifras. Se trata de que el niño aprenda la técnica de trazado de las diferentes cifras, pero se supone que el profesor les dice a los niños de qué cifra se trata y que cuando los niños la escriben, o bien recorren una cifra ya hecha, o bien la copian teniendo el modelo delante. Son las situaciones de comunicación las que tienen como objetivo prioritario el que el niño relacione el símbolo oral con el símbolo escrito y dé a este último un sentido como cardinal y ordinal.

Situaciones de comunicación escrita de números de una cifra

Las variables didácticas a tener en cuenta serían las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número: Del 0 al 9.

Tipo de situación: De petición o de recuerdo.

Tipo de codificación: Lectura (pasar del escrito al oral), escritura (pasar del oral al escrito) o las dos.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, materiales estructurados[6], papel y lápiz, banda en la que aparezcan escritas las cifras en orden (banda numérica), cajas o sobres para guardar objetos, etc.

En estas situaciones se pretende que los niños se planteen el problema de comunicar cantidades por escrito. En las situaciones de petición los niños tienen que pedir por escrito a otros niños o al profesor, o el profesor a los niños, que construyan un cierto cardinal u ordinal. En las de recuerdo se les dice que tomen nota escrita de un cierto cardinal u ordinal para poder recordarlo días después.

[6] Se llama así a todos aquellos materiales organizados en torno a determinadas configuraciones. Por ejemplo, dedos de las manos, dados, cartas de la baraja, fichas de dominó, regletas Cuisenaire, regletas con tapa, piezas Herbiniere-Lebert, ábaco, dinero ficticio, etc.

En un primer momento no hay que exigir que los niños usen las cifras. De hecho, estas situaciones se pueden plantear sin que los niños las conozcan. Las estrategias iniciales serán las de dibujar los objetos o la de dibujar una colección de muestra con el mismo cardinal: dedos, palotes, etc. Si se pone a disposición de los niños una banda numérica con las cifras escritas del 1 al 9 los niños pueden leer y escribir los mensajes cifrados con más facilidad, pues pueden encontrar la cifra contando.

3.6. Situaciones de lectura y escritura de números de varias cifras

La enseñanza del sistema de numeración escrito se lleva a cabo planteando situaciones de agrupación y de comunicación.

Situaciones de agrupación de cardinales

En un primer momento, se parte de conjuntos de objetos de cardinal dado y se pide a los niños que distribuyan los objetos en grupos de diez, o bien, dados varios grupos de diez y un resto, que den el cardinal del conjunto total. Posteriormente se agrupa por centenas y después por millares, pero para hacer estas agrupaciones es necesario trabajar con un material estructurado que permita hacerlas con rapidez, como el ábaco o el dinero ficticio.

Son situaciones que, en un principio, se deben resolver oralmente y en las que la estimación previa del resultado juega un papel importante. Una vez presentadas varias de estas situaciones, conviene pedirles a los niños que estimen cuántos grupos de diez van a salir antes de iniciar ninguna acción. De esta manera, los niños se van familiarizando con el hecho de que en un treinta y tantos se obtienen tres decenas, en un cincuenta y tantos, cinco, etc. Cuando este conocimiento empieza a afianzarse es el momento de presentar la escritura de los números y seguir realizando estas actividades con el apoyo escrito.

Las variables didácticas a considerar son las siguientes:

Tamaño del número: De diez en adelante.

Tamaño de la agrupación: Diez, cien, mil, etc.

Tipo de situación: De obtención del número de grupos (a partir del cardinal) o de obtención del cardinal (conocido el número de grupos.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, cubitos encajables, manos, cartas de la baraja, regletas Cuisenaire, ábaco, dinero ficticio; cajas, sobres, bolsitas para guardar objetos, etc.

Estimación del resultado: Con o sin exigencia previa de estimación del resultado.

Escritura del cardinal: Con o sin escritura del cardinal.

Situaciones de comunicación escrita de números de más de una cifra

Son situaciones similares a las de comunicación escrita de números de una cifra, la novedad es que se añade el tema del calendario. Para ello, cada comienzo de mes se colocara en la clase un cuadro con las casillas vacías correspondientes a los distintos días del mes. Se apuntarán las efemérides (cumpleaños de los niños, días de fiesta, etc.), contando las casillas desde el principio hasta llegar a la que interesa. Después, cada día se pondrá una pegatina con su fecha.

Las variables didácticas a tener en cuenta serían las siguientes:

Significado del número: Cardinal u ordinal.

Tamaño del número: De 10 en adelante.

Tipo de situación: De petición, recuerdo o calendario.

Tipo de codificación: Lectura (pasar del escrito al oral), escritura (pasar del oral al escrito) o las dos.

Material utilizado: Todo tipo de objetos que se puedan contar, regletas Cuisenaire, ábaco, dinero ficticio, papel y lápiz, cuadro en el que aparezcan escritos los cien primeros números en orden (cuadro numérico), cajas o sobres para guardar objetos, etc.

Un apoyo importante para escribir números de dos cifras es la representación de esos mismos números en el ábaco. Esto permite al profesor corregir con rapidez los errores de inversión del orden de las cifras. Ante un niño que escribe el treinta y cinco como 53, es relativamente rápido pedirle que represente el número en el ábaco y decirle que ponga primero el número de decenas y después el de unidades. En el caso de las centenas se pueden utilizar varios ábacos o billetes que imitan dinero.

Ejercicios:

11. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 1er curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de la lectura y escritura de números.

12. Analizar en un libro de texto de primaria si se incluyen o no, tareas o actividades de lectura y escritura de números y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.7. Materiales para el estudio de la numeración

Las actividades manipulativas con material concreto son esenciales para la comprensión del valor de posición de las cifras en el sistema de numeración. El uso de materiales concretos en sus diversas modalidades es una variable de las situaciones que hemos indicado en las secciones anteriores. Aquí describimos algunos de los materiales más frecuentemente utilizados.

En la figura 1.1 se muestran algunos ejemplos de materiales mediante los cuales se expresa el número 123. El interés de usar distintos materiales es para que el niño no asocie el valor posicional con un modelo particular.

Con el uso de materiales concretos diversos no se trata de que los alumnos abstraigan algo que tuvieran en común dichos modelos, como si los conceptos a construir tuvieran una naturaleza empírica. El fin esencial será lograr que la comprensión de las reglas del sistema de numeración posicional decimal sea independiente de los modelos físicos utilizables. Estos modelos pueden ser proporcionales o no proporcionales:

- En los proporcionales de base 10, como los bloques multibase, haces de palillos, etc., el material que expresa la decena es diez veces mayor en tamaño que el que expresa la unidad; la representación de la centena es diez veces mayor que la decena, etc. Los instrumentos de medida también pueden usarse como modelos proporcionales de la numeración: las bandas o cintas de metros, decímetros y centímetros se pueden usar como modelos de cualquier número de tres cifras.
- Los modelos no proporcionales, tales como el dinero, el ábaco, etc. no mantienen ninguna relación de tamaño entre las distintas piezas que representan los números. Por ejemplo, una moneda de 1 euro no es cien veces mayor en tamaño que la que representa un céntimo.

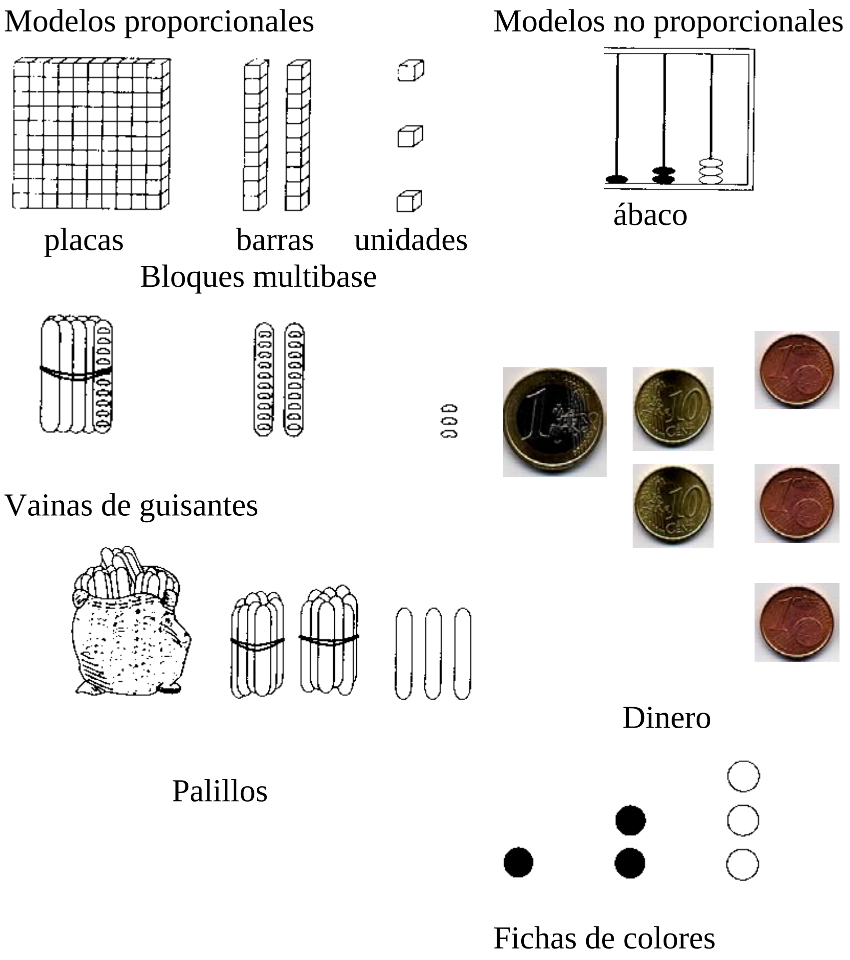
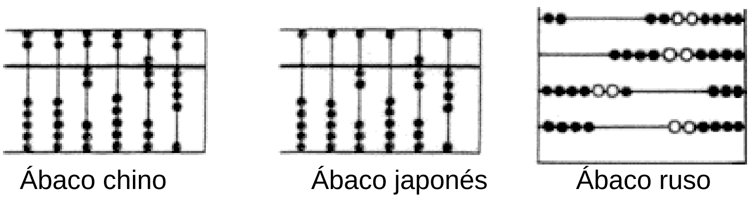


Figura 1.1: Expresión del número123

Entre los materiales manipulativos más utilizados en el estudio de la numeración y las operaciones aritméticas están los ábacos, los bloques multibase y los números en color.

Ábacos

Son juegos de varillas insertadas en un bastidor sobre las que se deslizan bolas o fichas como en un collar. Reproducen físicamente las características de los sistemas de numeración posicionales ordenados ya que las bolas representan un valor numérico diferente según la posición de la varilla en están colocadas.



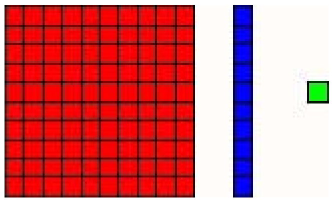
En el ábaco decimal cada bola representa una unidad, pero bolas situadas en varillas diferentes representan unidades de distintos órdenes; sobre cada varilla se tiene una potencia de la base. En cada varilla habrá 9 bolas como máximo ya que al añadir otra más se sustituyen por una bola colocada en la varilla de la izquierda.

Ábacos no proporcionales. Antes de utilizar los ábacos no proporcionales se recomienda usar variantes en los cuales no se usa el convenio del valor de posición, de modo que, por ejemplo, el número 23 queda expresado con dos hileras de 10 bolas y otra de tres. En cada hilera, que se coloca horizontalmente, que ponen 10 bolas, 5 de un color y 5 de otro.

Bloques multibase

Los bloques multibase se presentan en cajas, una para cada base de numeración. En cada caja existen piezas (generalmente de madera o material plástico) de cuatro tipos: cubos, barras, placas y bloques. Los cubos representan las unidades simples o de primer orden, las barras las unidades de segundo orden, las placas las de tercero y los bloques las de cuarto orden.

Forman un sistema de numeración por agrupamiento múltiple. Cada pieza corresponde a una potencia de la base. La representación de un número se corresponde con el tamaño de la cantidad ya que van arrastrando todas las unidades.Palillos, cordones, o cualquier otro material cotidiano, enlazados o distribuidos en cajas, haciendo grupos de diez unidades, reproducen las características de los bloques.

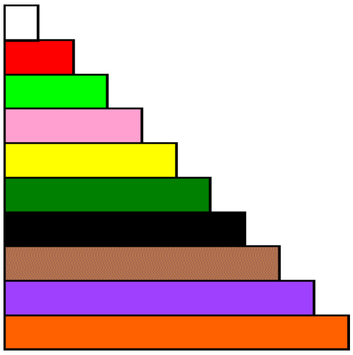


Bloque multibase de base 10

Números en color

Los números en color, también llamados regletas de Cuisenaire, son una colección de varillas coloreadas de longitudes que van desde 1cm (unidades) a 10 cm (decenas) que permiten reproducir las características de los sistemas de numeración de agrupamiento simple. Las varillas tienen forma de prisma cuadrangular de un centímetro cuadrado de sección y sus longitudes varían de centímetro en centímetro desde uno hasta diez.

Las regletas que tienen el mismo color tienen también la misma longitud. Los distintos tamaños permiten ordenar las regletas, formando escaleras; uniéndolas por los extremos se pueden obtener distintas longitudes que representarán números diferentes y las operaciones aritméticas.



Regletas de Cuisenaire

3.8. Recursos en Internet

Vamos a contar:

http://math.rice.edu/~lanius/counting/spcount.html

Descripción:

Este conjunto de lecciones animadas para niños de preescolar o primer curso de primaria sobre los números se presenta también en castellano. Incluye orientaciones para los maestros. Es parte de un conjunto de recursos más amplio para el aula de matemáticas. Los principales objetivos son:

- Contar un pequeño número de objetos
- Comprender el significado cardinal y ordinal de los números al cuantificar e identificar el orden de objetos
- Conectar números y palabras con las cantidades que representan
- Desarrollar la comprensión del tamaño relativo de los números y hacer conexiones entre el cardinal y orden dentro de una secuencia.
- Adquirir diferentes significados para la adición y substracción de números naturales y relacionar estas dos operaciones.

Ejercicio 15*:*

1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares implementados de dichas variables. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las que se hacen habitualmente con papel y lápiz.
    - ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso?
    - ¿Cómo cambian las técnicas de solución?
5. Después que los alumnos han explorado el programa y realizado las actividades, ¿Qué tipo de explicaciones podría dar el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego?

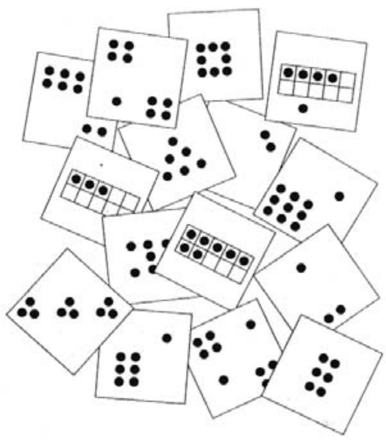
4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 1er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas de número y numeración.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 1º y 2º de primaria.

4.2. Diseño de actividades[7]



1. Actividades basadas en configuraciones puntuales
La figura adjunta muestra una colección de tarjetas en las cuales hay representadas distintas cantidades de puntos dispuestos según diversos patrones.
Propón una colección de tareas que permitan pensar a los alumnos sobre los números y sus composiciones.

2. La tabla 100

A continuación se muestra una disposición de los números del 0 al 99 que se conoce como la “tabla 100”; una variante puede ser comenzar

[7] Van de Walle (2001)

desde 1. Plantea actividades útiles para el aprendizaje de la serie numérica, ligadas al descubrimiento de patrones o regularidades en la disposición de los números.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4.3. Análisis didáctico de tareas escolares[8]

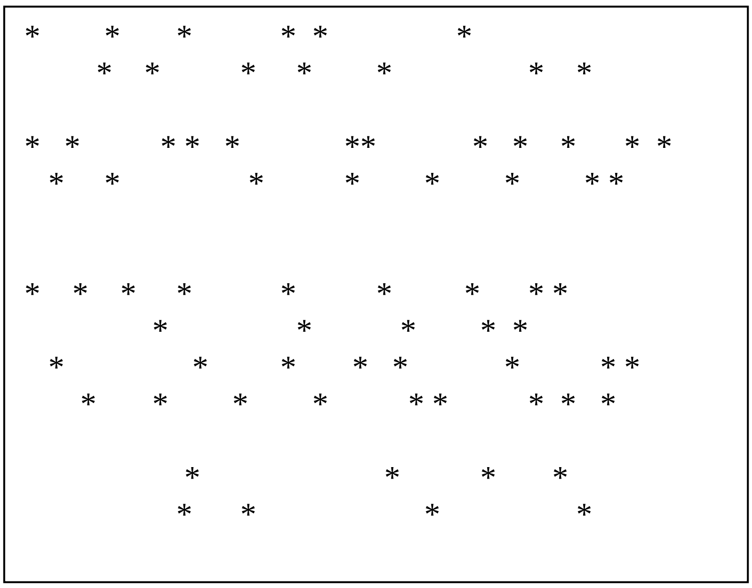
Numeración

En una clase de primaria, antes de comenzar el primer período de trabajo sobre estudio de los números, particularmente de los números de tres cifras, el maestro procede a realizar la evaluación inicial incluida en el Anexo.

a) ¿Cuál es la función de una evaluación de este tipo y qué consecuencias tiene respecto a la organización de la clase?
b) Indicar para cada ejercicio qué competencias del alumno se propone verificar el maestro.
c) Para los alumnos que no han tenido éxito en el ejercicio nº 4, ¿qué material de ayuda propondrías? (describe el material)

<u>Anexo:</u> Conocimientos sobre numeración

1.¿Cuántos puntos hay marcados en este cuadro?



[8] Brousseau y cols (1995)

<table>
<tr><td>2. Observa y comple:
 226   227   228
....   345   .....
....   603   .....
....   230   .....
....   139   .....
....   200   .....
....   99   .....
....   501   .....
....</td><td>3. El maestro dicta los números:

246 - 120 - 500 - 63 - 275 895 - 709 -
314</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Escribe estos números ordenados de menor a mayor,

326 -   157 - 609 - 98 - 328 - 700 240 - 620</td></tr>
<tr><td>5. Observa los ejemplos y completa:

En 387, la cifra de las decenas es ____
En 246, la cifra de las centenas es ___
En 253, la cifra de las unidades es ___</td><td>

En 387, la cifra de las decenas es ____
En 246, el número de centenas es ___
En 253, el número de unidades es ___</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Observa y continúa:

160 - 162 - 164   -   -   -   -

275 - 280 - 285   -   -   -   -

 90   -   92   - 94   -   -   -   -

360   -   370 - 380 -   -   -   -</td></tr>
</table>

4.4. Diagnóstico de la comprensión de la numeración decimal[9]

Utilizar las siguientes tareas con una pequeña muestra de alumnos de primer curso para evaluar su comprensión y competencia en el numeración decimal.

Destrezas de recuento

Actividad 1.   Contar hacia adelante, a partir de 77.
Actividad 2.   Contar hacia atrás, a partir de 55.
Actividad 3.   Contar de diez en diez.
Actividad 4.   Contar por decenas, comenzando en 34.
Actividad 5.   Contar hacia atrás por decenas, comenzando en 130.

[9] Reys et. al. (2001), p. 168.

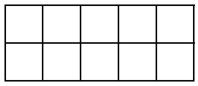
Actividad 6. Escribir el número 342. Pedir al niño que lea ese número. A continuación que escriba,

- el número siguiente a 342;
- el número que resulta de añadirle 10 unidades más;
- el número anterior;
- el número que resulta de quitarle 10 unidades.

Correspondencia entre dígitos y cardinales

Actividad 7. Mostrar al niño una colección de 36 fichas (o cualquier otro material). Pedir que cuente la cantidad de fichas y que escriba el número resultante. Señalar el 6 en el 36 y preguntar, “¿Qué quiere decir este 6 en relación a la cantidad de piezas que hay? Después señale el 3 y repetir la pregunta.

Uso de las decenas



Actividad 8. Tomar 47 fichas y hacer que el niño las cuente. A continuación mostrar al niño 10 tarjetas con casilleros decimales marcados (figura adjunta). Preguntar: Si queremos poner estas fichas en los espacios de estas tarjetas, ¿cuántas tarjetas podemos llenar?

Usar grupos de 10

Actividad 9. Preparar tarjetas con semillas u otras piezas pegadas en las tarjetas dispuestas en hileras de 10. Proporcionar al menos 10 tarjetas con una cantidad grande de semillas. Después de asegurarnos que el niño ha contado varias tarjetas de semillas y sabe que hay 10 en cada una de ellas, pedir que muestre 34 semillas. (¿Cuenta las semillas individualmente, o usa las tarjetas con decenas de semillas?). Esta actividad se puede hacer también con centenas.

BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D’Aquitaine.

Castro, Enr, y Castro, E. (2001). Primeros conceptos numéricos. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 123-150). Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1987). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Ifrah, G. (1985).*Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p. 151-176). Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V., Smith, N. L. y Suydam, M. N. (2001). *Helping children learn mathematics* (Sixth edit.). New York: John Wiley.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª ed.). New York: Longman.

Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 2:

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El dominio de los "hechos numéricos básicos" (las tablas de las operaciones aritméticas) implica que los niños puedan dar una respuesta rápida sin recurrir a medios no eficientes, como el recuento. Este aprendizaje, para el caso de la suma y la resta comienza desde el primer nivel, pero debe continuar en segundo curso y requiere, de parte del maestro:

- Ayudar a los alumnos a desarrollar una sólida comprensión de las operaciones y de las relaciones entre los números.
- Desarrollar técnicas eficientes de recuerdo de los hechos numéricos.
- Proporcionar práctica suficiente en el uso y selección de dichas técnicas.

El profesor deberá ser capaz de ayudar a los niños a conectar los diversos significados, interpretaciones y relaciones de las operaciones aritméticas (adición, sustracción), de manera que puedan usarlas de manera eficiente en los contextos de la vida real. Los problemas verbales y los modelos gráficos o tangibles (conjuntos de fichas y la recta numérica) son las dos herramientas básicas que tiene el maestro para ayudar a los niños a desarrollar el significado de las operaciones. Los problemas verbales proporcionan una oportunidad de examinar los diversos sentidos de cada operación. Su uso en la clase debe hacerse en un ambiente de indagación, permitiendo a los niños usar sus propias técnicas y justificar sus soluciones.

En la actualidad la disponibilidad de calculadoras y ordenadores nos libera de la realización de cálculos penosos, pero al mismo tiempo lleva a conceder más importancia al desarrollo del sentido de la pertinencia y racionalidad de los resultados. Por ello la enseñanza de diversas estrategias de cálculo mental y de estimación figura como un objetivo en los diversos currículos de matemáticas básicas. El estudio de los algoritmos tradicionales de cálculos de las operaciones aritméticas, no debe ser un obstáculo para que los alumnos desarrollen sus propias estrategias. La enseñanza se debe apoyar en las estrategias inventadas por los propios alumnos por las siguientes razones:

- Favorecen la comprensión del sistema de numeración decimal.
- Se basan en la comprensión de los estudiantes.
- Los alumnos comenten menos errores cuando usan sus propias estrategias.
- Promueven el pensamiento matemático, ya que son un ejemplo del "hacer matemáticas"

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Las operaciones de suma, resta y sus algoritmos.
2. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
2. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuestas numérica es o no razonable.
3. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
4. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
2. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

Estas orientaciones curriculares se desarrollan en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989), donde se indica que, al finalizar la Educación Primaria, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (suma, resta), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.
2. Utilizar instrumentos de cálculo (calculadora, ábaco, ...) y medida (regla, compás, etc.) decidiendo, en cada caso, sobre la posible pertinencia y ventajas que implica su uso y sometiendo los resultados a una revisión sistemática.
3. Elaborar y utilizar estrategias personales de cálculo mental para la resolución de problemas sencillos a partir de su conocimiento de las propiedades de los sistemas de numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas (suma, resta).

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

3. Las operaciones de suma, resta.
   - Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la suma como unión, incremento; la resta como disminución, comparación, complemento
   - La identificación de las operaciones inversas (suma y resta).
   - Símbolos de las operaciones

5. Algoritmos de las operaciones.
   - Algoritmos para efectuar las operaciones con números naturales.
   - Jerarquía de las operaciones y función de los paréntesis.
   - Algoritmos para aplicar la suma y resta al cálculo del tiempo y de ángulos.
   - Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos

8. Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
9. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
10. Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
11. Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.
12. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
13. Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.
14. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.
15. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental

- Suma, resta
- Utilización de la composición y descomposición de números, de la asociatividad y de la conmutatividad para elaborar estrategias de cálculo mental.

16. Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
17. utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes, valores y normas

1. Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
2. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
3. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
4. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
5. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Para los grados K-2 (Infantil y primer ciclo de primaria) el NCTM (2000) propone los estándares siguientes:

- *Comprender los significados de las operaciones y las relaciones entre ellas*
  - Comprender las diversos significados de la adición y sustracción de números naturales y las relaciones ente las dos operaciones.
  - Comprender los efectos de la adición y susbracción de números naturales.
  - Comprender las situaciones que implican multiplicación y división, como son las de agrupamientos de colecciones de objetos de igual cardinal y reparto equitativo.
- *Calcular de manera fluida y hacer estimaciones razonables*
  - Desarrollar y usar estrategias de cálculo con números naturales, particularmente sobre la adición y sustracción.
  - Dominar las tablas de sumar y restar
  - Usar una variedad de métodos y herramientas de cálculo, incluyendo objetos, cálculo mental, estimación, papel y lápiz y calculadoras.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,

- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

El conocimiento de la suma y resta de números naturales debe organizarse alrededor de las siguientes facetas o componentes:

- los hechos numéricos básicos (tablas de sumar y restar)
- las técnicas orales de cálculo

  - las técnicas escritas de cálculo
- las propiedades más importantes de dichas operaciones
- las situaciones en las que el uso de dichas operaciones es pertinente.

Por tanto, cualquier propuesta de enseñanza de la suma y la resta debe atender al desarrollo de estos aspectos del conocimiento. De esta manera, y a costa de almacenar más información en nuestro cerebro, podemos abreviar los procesos de recuento. Si tenemos que averiguar el cardinal de una colección de objetos que se compone de partes que ya están cuantificadas no será necesario efectuar un nuevo recuento, bastará con poner en acción nuestro conocimiento de los hechos numéricos de la suma, de las técnicas de cálculo asociadas a esa operación y del hecho de que esa operación es adecuada para resolver esa situación.

La experiencia de que si una colección se compone de una parte de tres objetos y otra de cinco objetos, en total habrá ocho objetos, es la que permite decir que "tres más cinco son ocho" en determinadas culturas, en particular en la nuestra. Del mismo modo, la constatación continua de que el cardinal de un conjunto de tres elementos al que se le añaden dos es el mismo que el cardinal de un conjunto de dos elementos al que se le añaden tres, nos lleva a la propiedad conmutativa de la suma; etc. Posteriormente, el conocimiento de los hechos numéricos básicos de suma y resta así como de sus propiedades permite construir técnicas de cálculo formales desligadas de las situaciones que justifican dichos cálculos.

2.1. Desarrollo de las técnicas de recuento abreviado

Los niños van dando significado a la suma y la resta a través del planteamiento y resolución de las situaciones aditivas. Pero en un primer momento, el desconocimiento de la tabla de sumar y restar impide a los alumnos resolver estas situaciones mediante sumas o restas, necesitando recurrir al recuento. El hecho, constatado una y otra vez por medio del recuento, de que si tenemos tres objetos y añadimos dos más tendremos cinco objetos en total es lo que permite decir al niño, en una fase posterior y sin necesidad de recuento, que tres más dos son cinco.

Ahora bien, el paso del recuento al conocimiento de las tablas no es inmediato, sino que es un proceso paulatino con etapas intermedias que en el caso de la suma, detallamos a continuación:

- *Recuento de todos.* El niño representa las dos colecciones de objetos de las que habla la situación mediante algún tipo de material (dedos, palotes, fichas, objetos diversos), las junta y lo vuelve a contar todo de nuevo.
- *Recuento de todos haciendo énfasis en el primer sumando.* El niño recita los números hasta llegar al primer sumando (sin construir una colección de objetos que represente ese sumando) y continúa contando la colección de objetos que representa al segundo sumando.
- *Recuento de todos haciendo énfasis en el sumando mayor.* Lo mismo que en el caso anterior, pero eligiendo como primer sumando el sumando mayor .
- *Recuento a partir del sumando mayor.* El niño construye una colección de objetos que representa el sumando menor y la cuenta partiendo del sumando mayor .

En el caso de la resta no nos encontramos con una secuencia de estrategias de recuento que evolucionan en el tiempo, pasándose de unas a otras, sino con estrategias de recuento diferentes en función de la situación que se propone y que pueden ser simultáneas:

- *Recuento de lo que queda.* Se utiliza en situaciones de ETE (estado, transformación, estado) en las que al conjunto inicial se le quitan elementos. Consiste en representar mediante objetos el conjunto inicial, quitar los elementos que indica la transformación y volver a contar lo que queda.

- *Recuento hacia atrás.* Se utiliza en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar hacia atrás desde el minuendo tantas veces como indica el sustraendo (representado mediante una colección de objetos, frecuentemente dedos). Esta técnica se utiliza poco por la dificultad que supone para los niños contar hacia atrás.
- *Recuento de la diferencia.* En las situaciones de ECE (estado, comparación, estado) en las que la incógnita es el término de comparación, se construyen los dos conjuntos, se emparejan y se cuentan los objetos que quedan sin pareja.
- *Recuento desde el sustraendo hasta el minuendo.* Se usa en las mismas situaciones que el caso anterior y consiste en contar desde el sustraendo hasta el minuendo llevando la cuenta con una colección de objetos (generalmente dedos) de las palabras que se dicen. Posteriormente, se cuenta la colección de objetos.

Estas estrategias se superan cuando el niño memoriza las tablas o desarrolla técnicas mentales (cálculo de dobles, complemento a cinco o a diez, sumar en vez de restar, etc.) para obtenerlas con rapidez.

2.2. Desarrollo de la comprensión de situaciones aditivas

Con respecto a la estructura lógica de la situación

Se observa que las dificultades de los niños a la hora de afrontar una situación aditiva dependen en gran medida de la estructura lógica de la situación y de la posición de la incógnita. Una gradación de menor a mayor dificultad podría ser la siguiente:

- EEE (con la incógnita en el estado final o en uno de los parciales) y ETE (con la incógnita en el estado final o la transformación).
- ECE (con la incógnita en la transformación o en el *primer* término de la comparación).
- ETE (con la incógnita en el estado inicial y ECE (con la incógnita en el *segundo* término de la comparación).
- TTT (cuando las tres transformaciones tienen el mismo sentido).
- TTT (cuando las transformaciones tienen diferente sentido)
- CTC y CCC.

Con respecto al grado de contextualización de la situación

Se observa que los niños entienden mejor las situaciones aditivas cuanto más contextualizadas están. La clasificación de las situaciones en función de un mayor a menor grado de comprensión de las mismas y, por consiguiente, de una mayor a menor capacidad de resolver con éxito, sería la siguiente:

- Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor.
- Situación hipotética contextualizada, con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica.
- Situación hipotética contextualizada, sin material a disposición del niño. En una primera fase el niño recurre a los dedos o al dibujo de palotes para efectuar los recuentos necesarios. En una segunda fase recurre a técnicas de cálculo orales o escritas.
- Situación formal, es decir, situación en la que se pregunta sin más por el resultado de una suma o resta sin referirlo a ningún contexto físico o social.

Los tres primeros tipos de situaciones se engloban en la categoría de *situaciones concretas* -situaciones con un mayor o menor grado de contextualización-, en oposición a las situaciones formales o no contextualizadas.

Con respecto al tamaño de los datos

A los niños les resulta más difícil interpretar correctamente una situación aditiva cuanto mayor es el tamaño de los números que intervienen en ella. Se han realizado experiencias en las que se ha pedido a grupos de niños que resuelvan la misma situación, una vez con números pequeños y otra con números grandes, observándose que el porcentaje de resoluciones correctas disminuye sensiblemente en el segundo caso.

2.3. Errores en la ejecución de los algoritmos escritos de suma y resta

Los errores más frecuentes que cometen los niños al realizar los algoritmos son los siguientes:

a) De colocación de los números. Justifican los números a derecha en vez de hacerlo a izquierda o no hacen coincidir las columnas de las cifras del primer número con las columnas del segundo.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 2 \\ + & 4 & 5 & \\ \hline & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

b) *De orden de obtención de los hechos numéricos básicos*. Empiezan a sumar o restar por la columna de la izquierda y avanzan hacia la derecha. Este error viene favorecido por la tradición de enseñar primero el algoritmo sin llevadas, dejando la introducción de las llevadas para una segunda fase.

c) *De obtención de los hechos numéricos básicos*. Se equivocan en los resultados de la tabla de sumar o restar.

d) *De resta de la cifra menor de la mayor*. Restan la cifra menor de la mayor sin fijarse si corresponde al minuendo o al sustraendo.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 4 & 2 \\ - & 3 & 7 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 6 \end{array}$$

e) *De colocación de un cero*. Cuando la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo ponen como resultado el número cero.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 4 & 6 \\ - & 3 & 7 & 3 \\ \hline & 2 & 0 & 3 \end{array}$$

f) *De lugar vacío*. Ante un lugar vacío, no completan la operación u olvidan la llevada.

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 8 & 6 \\ - & & 5 & 4 \\ \hline & & 3 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 5 & 4 & 6 \\ - & & 5 & 4 \\ \hline & 5 & 9 & 2 \end{array}$$

g) *De olvido de la llevada*. No incorporan la llevada a la columna siguiente.

h) *De escritura del resultado completo*. Cuando al operar una columna obtienen un número de dos cifras lo escriben completo en el resultado.

$$\begin{array}{rrr} & 3 & 6 \\ + & 5 & 6 \\ \hline 8 & 1 & 2 \end{array}$$

Ejercicio 2: Diagnóstico de competencias en la realización de sumas y restas formales orales

En la tabla siguiente se incluye una relación de tareas aditivas que se pueden usar para el diagnóstico de las competencias de los alumnos de 1er curso de primaria en la realización oral de sumas y restas formales. Utiliza esta pauta con algún niño de dicho nivel e identifica las tareas que supongan mayor dificultad.

Cada una de las operaciones siguientes puede plantearse como una suma (3+5=   ), una resta (8-5=   ), la inversa de una suma (3+   =8), la inversa de una resta (8-   =3), una descomposición en suma (8=3+   ), o una descomposición en resta (5=8-   ). Deben resolverse utilizando fichas, el ábaco u otro material, salvo cuando los niños son capaces de dar el resultado mentalmente y en poco tiempo.

1. Operaciones con términos y resultado menor o igual que cinco (operaciones que se abarcan con una sola mano)
   1+1=2; 1+2=3;   1+3=4;   1+4=5;   2+2=4;   2+3=5.
2. Operaciones con términos y resultado menor o igual que diez (operaciones que se abarcan con las dos manos)
   - De dobles: 1+1=2;   2+2=4;   3+3=6;   4+4=8;   5+5=10.
   - De complementos a cinco por defecto o exceso: 1+4=5;   2+3=5;   5+1=6; etc.
   - De complemento a diez por defecto: 1+9=10;   2+8=10;   3+7=10;   4+6=10;   5+5=10.
   - De operaciones en general: 1+6=7; 1+7=8; 1+8=9; 2+4=6; 2+6=8; 2+7=9; 3+4=7; 3+6=9.
3. Operaciones con términos y resultado menor o igual que 20:
   - De dobles: 6+6=12; 7+7=14; 8+8=16; 9+9=18; 10+10=20.
   - De complementos a diez por exceso: 10+1=11; 10+2=12; 10+3=13; 10+4=14; etc.
   - De complementos a quince por defecto o exceso: 14+1 =15; 13+2=15; 12+3=15, 11+4=15; etc.
   - De complementos a 20 por defecto: 19+1=20; 18+2=20; 17+3=20; etc.
   - De operaciones en general: 1+11=12; 1+12=13; ...; 8+11=19.
4. Operaciones con términos y resultado menor o igual que cien:
   - De decenas con unidades: 20+7)27; 60+2=62=; 30-4=26; 50-1=49, etc.
   - De decenas con decenas: 30+40=70;   60-50=10; etc.
     - o Dobles: 10+10=20; 20+20=40; 60-30=30; etc.
     - o Complementos a 100: 10+90=100; 20+80=100; 30+70=100; etc.
   - De decenas y unidades con decenas: 47+20=67; 55-10=45; 40-13=27; etc.
     - Restar todas las decenas: 32-30= 2; etc.
   - De decenas y unidades con unidades:
     - que no sopresan la decena: 45+3=48; 45-3=42; etc.
     - que sobrepasan la decena: 45+7=52; 45-7=38; etc.
   - De decenas y unidades con decenas y unidades:
     - Dobles: 11+11=22; 12+12=24; 25+25=50; etc.
5. Operaciones con términos menores o iguales que cien y resultado mayor que cien:
   - De decenas con decenas: 60+70= 130; etc.
     - Dobles: 60+60=120; 70+70=140; etc.
   - De decenas y unidades con decenas: 77+50=127, etc.
   - De decenas y unidades con unidades: 98+6=104; etc.
   - De decenas y unidades con decenas y unidades.
6. Operaciones con términos menores o iguales que mil.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

En concordancia con el apartado anterior, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones aditivas concretas y la de las situaciones aditivas formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las operaciones, que viene asociado a las situaciones que resuelve, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar la memorización de las tablas y las técnicas orales y escritas.

3.1. Secuencia didáctica de introducción de la suma y resta de números naturales

Para conseguir los objetivos didácticos, tendremos que plantear a los niños diferentes situaciones aditivas para que, a través de los recuentos, vayan construyendo las operaciones de suma y resta. Estas situaciones deben variarse recorriendo los problemas de combinación, cambio y comparación, así como las diferentes posiciones posibles de la incógnita. Si no se usase esta variedad de problemas, los niños decidirían que la operación que resuelve el problema es una suma porque aparece la palabra 'total' o la palabra 'más' o porque en el enunciado se habla de 'me dan', 'me regalan', etc.; o una resta porque se pregunta 'cuánto queda', o aparece la palabra 'menos', o se habla de 'quitar', etc.

Es también necesario plantear sumas y restas formales, es decir, descontextualizadas (por ejemplo, 5 + 9, 14 - 5, 25 + 2, etc.), para que los niños adquieran técnicas orales (y posteriormente, escritas) de suma y resta. Es la posesión de estas técnicas lo que convierte en interesante la decisión sobre cuál es la operación que resuelve un problema. Decidir si un problema se resuelve mediante la suma 47 + 10 o la resta 47 - 10 es una cuestión difícil que exige tomar en consideración diferentes aspectos de la situación. A un niño no le merece la pena plantearse una cuestión tan compleja si no tiene una técnica que le permita efectuar con rapidez la operación elegida. En ese caso es más cómodo representarse la situación con algún tipo de material y hacer directamente los recuentos necesarios.

En el primer caso, el niño tiene que resolver los problemas de manera autónoma, recurriendo, en un principio, a la representación con materiales y el recuento. La finalidad de estas tareas es que las estrategias iniciales de recuento evolucionen (al ritmo del niño) y que, a medida que se consolidan las técnicas de suma y resta, la base experiencial adquirida por el alumno en la resolución de esas situaciones le permita decidir qué operaciones resuelven el problema.

En el segundo caso, se trata de efectuar sumas y restas que inicialmente se resolverán por medio de recuentos. Pero conviene hacerles evolucionar cuanto antes hacia estrategias más rápidas. Para ello, se debe trabajar con distintos materiales estructurados (dedos de la mano, regletas Cuisenaire, ábaco, etc.) que permitan obviar los recuentos y proporcionen, por medio del aprendizaje de distintas configuraciones numéricas, el entramado necesario para establecer las técnicas orales de suma y resta.

Las dos vías: situaciones aditivas concretas y situaciones aditivas formales, deben desarrollarse a la vez. Una posible forma de hacerlo sería la siguiente:

- Se comienza trabajando las situaciones concretas de EEE, ETE, y ECE en el tramo numérico de 0 a 20, con materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Al mismo tiempo los niños deben familiarizarse con los materiales estructurados y trabajar, mediante situaciones formales, la memorización de las operaciones que caben en una mano, de los dobles de una cifra (5 + 5, 6 + 6, etc.) y de los complementos a 10 (3 + 7, 6 + 4, etc.).

- Se prosiguen las situaciones concretas en el tramo 0 a 50, con casos en los que no haya posibilidad de recontar los dos términos para forzar la evolución de las técnicas de recuento y con presentación de situaciones hipotéticas contextualizadas referentes a números entre 0 y 20. Mientras tanto, a nivel formal, se continúa con la consolidación de la tabla de sumar y restar y de las operaciones con términos y resultado menor que 20.

- Se introduce el material estructurado en situaciones concretas con términos entre 0 y 100. Las situaciones hipotéticas contextualizadas con material a disposición del niño se trabajan entre 0 y 50. Además se trabajarán situaciones hipotéticas contextualizadas sin material entre 0 y 20, tratando que, en ese caso, los niños empiecen a expresar las soluciones en términos de sumas o restas. En la vía de operaciones formales se continúa con las sumas y restas de términos menores o iguales que 100 en forma oral.

- Se introducen tramos cada vez más altos de la sucesión numérica, siguiendo unas pautas similares a las comentadas en los items anteriores e introduciendo las técnicas escritas de cálculo.

3.2. Situaciones aditivas concretas

Recomendamos una secuencia de situaciones aditivas concretas, que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [1].

Estas situaciones deben plantearse antes de hablar de sumas y de restas sin forzar al niño a decidir cuál es la operación que resuelve el problema, aun cuando ya domine las técnicas de sumar o restar. En un primer momento deben elegirse números pequeños, pero más adelante hay que utilizar números grandes y recurrir a recuentos abreviados y material estructurado.

Aun cuando al principio se permita al niño representar los dos datos de la situación, en momentos posteriores hay que imposibilitarle el recuento de alguno de los términos para forzarlo a pasar de las técnicas iniciales de "recuento de todo" y "recuento de lo que queda o de la diferencia" a estrategias más elaboradas, paso que muchos de los niños realizan espontáneamente.

Las variables didácticas de las situaciones aditivas concretas son las siguientes:

- *Significado de los números:* Cardinal, ordinal o medida.
- *Tamaño de los términos y resultado de la operación:* De 0 a 10, de 10 a 20, de 20 a 50, de 50 a 100, de 100 a 1.000, de 1.000 a 10.000, de 10.000 a 100.000, de 100.000 a 1.000.000, de 1.000.000 en adelante.
- *Estructura lógica de la situación:* Situaciones aditivas del tipo EEE, ETE, ECE, TTT , CTC o CCC.
- *Posición de la incógnita:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales; en el término medio de transformación o comparación; en el segundo término, el término final o el término total.
- *Sentido del término medio* (*sólo en las situaciones ETE, ECE* o *CTC*): creciente o decreciente; positivo o negativo.
- *Posibilidad de recuento de los términos:* Con posibilidad de recuento de los dos términos o de uno solo.

---

[1] Situación a-didáctica, aquél momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

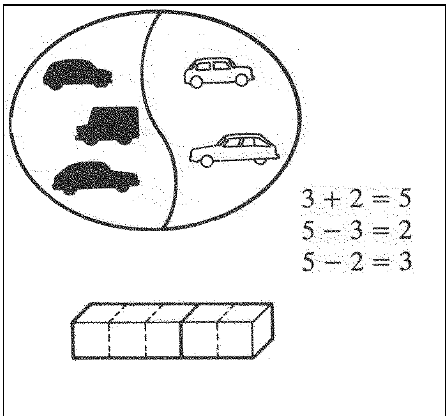
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor; Situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica; Situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

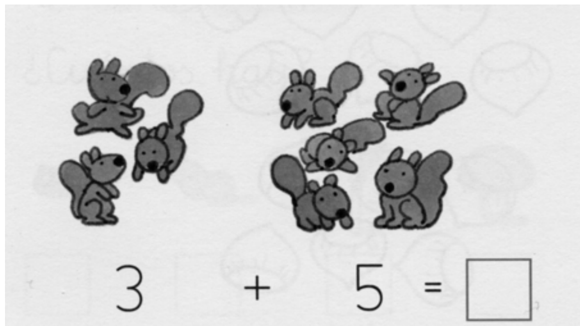
Ejercicios:

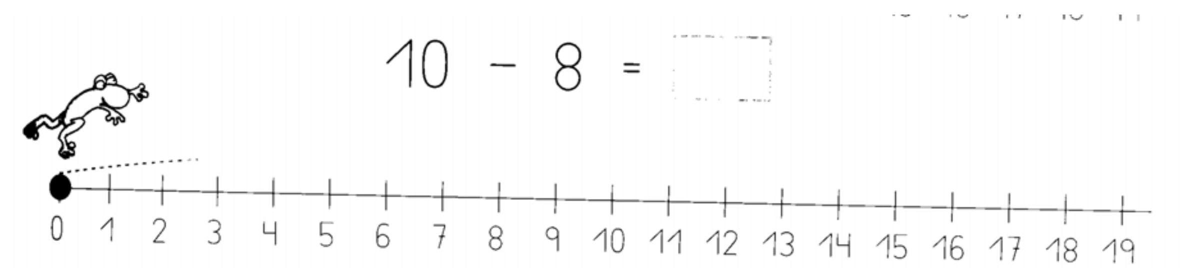
3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 2º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones aditivas concretas.

4. Analizar en un libro de texto de 2º curso las situaciones aditivas concretas que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

5. Indicar los valores particulares de las variables didácticas que intervienen en las tareas siguientes. Clasificar estas tareas según la estructura lógica descrita en la sección 1.2







3.3. Situaciones aditivas formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno sumas y restas formales, es decir, ejercicios del tipo 3 + 2, 12 - 5, etc. En un primer momento se animará al niño a contar para obtener el resultado, dándole a la suma un sentido de reunión de objetos y a la resta un sentido de separación, pero rápidamente se pasará a utilizar materiales estructurados (ábacos, bloques, regletas) para evitar los recuentos y facilitar la memorización de los resultados y la adquisición de técnicas orales. Para ello, dichos materiales han tenido que ser trabajados previamente, habiéndose familiarizado el niño con las distintas configuraciones numéricas.

Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* Suma o resta.

- *Dirección de la operación:*
  Directa (por ejemplo, 12 + 5 = ? , 15 - 11 = ?),
  Inversa (por ejemplo, ? + 5 = 12, 15 - ? = 9), o
  Descomposición (por ejemplo, 12 = 5 + ?, 11 = 15 - ?).

- *Tamaño de los términos y del resultado de la operación:*
  - Operaciones que caben en una mano: 2+3, 5-1, etc.
  - Operaciones que caben en las dos manos: 4+4,8-2, etc.
  - Operaciones de la tabla de sumar o restar: 8+7, 11-6, etc.
  - Operaciones con términos y resultado menor o igual que 20: 13+6, 17-4, etc.
  - Operaciones con términos menores que 100 y resultado menor, igual o mayor que 100.
  - Operaciones con términos menores que 1000 y resultado menor, igual o mayor que 1000.
  - Operaciones con términos mayores que 1000.
- *Número de cifras de los términos:* Los dos términos de la operación tienen el mismo o distinto número de cifras.

- *Número de cifras significativas concurrentes:*
  - Términos de cifras significativas no concurrentes: 40+5, 130-8, 200-45, 307+20, 4.000+324, etc.
  - Términos con una cifra significativa concurrente: 60+30, 42-6, 343+20, 208-4, 7.000+5.000, etc.
  - Términos con dos cifras significativas concurrentes: 82-24, 66+31, 128+32, 435-420, 7.282-11, etc.
  - Términos con tres o más cifras significativas concurrentes: 347+482, 526-419, 11.297-4.762, etc.
- *Existencia de llevadas:* La operación implica o no llevadas."

- *Técnica de cálculo:* Uso de material estructurado, técnica oral, técnica escrita, calculadora.

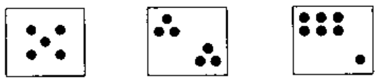
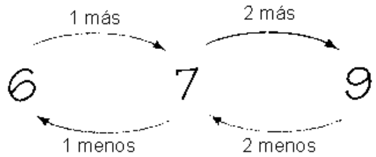
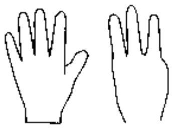
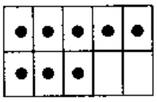
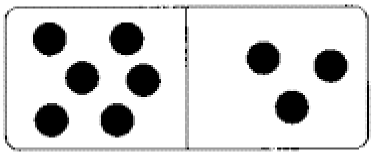
- *Tipo de material estructurado:* Dedos, regletas con tapa, regletas Cuisinaire, ábaco, etc.

Ejercicios:

6. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 2º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones aditivas formales.

7. Analizar en un libro de texto de 2º curso las situaciones aditivas formales que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

La figura adjunta muestra ejemplos de tareas para el estudio de las relaciones aditivas entre números pequeños, apoyadas en el uso de material:

Patrones espaciales  Cinco Seis Siete (patrón aprendido) (3 y 3) (6 y 1 más)	Uno más /Dos más Uno menos /Dos menos 
5 y 10 como referentes   Cinco y tres más Dos para diez	Parte – Parte – Todo  "Seis y tres son nueve"

3.4 Recursos en Internet

Crucigrama de números

http://www1.tpgi.com.au/users/puzzles/page19.html

Descripción

Plantea crucigramas que se resuelven mediante operaciones aritméticas. Hay varios niveles de dificultad y puede controlarse el tipo de operación, así como los errores cometidos. Puede ser un recurso para el refuerzo de las tablas de las operaciones y la ejercitación en el cálculo.

Ejercicio

Ejercicio 8:

1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares de dichas variables implementados. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las que se hacen habitualmente con papel y lápiz. ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso?
5. ¿Cómo cambian las técnicas de solución?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 1º a 3º curso de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "adición y substracción" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 1º y 2º de primaria.

4.2. Diseño de una evaluación

El siguiente problema es un problema aditivo de "estado-comparación-estado":

"Maria tiene 5 canicas. Juan tiene 6 canicas más que María. ¿Cuántas canicas tiene María?"

Este problema es de la forma a + b = c, y se pide el valor c, es decir el total. La incógnita es el total. Hay diferentes formas de variar este problema:

- Cambiando la posición de la incógnita;
- Cambiando el término de comparación: ¿*Cuántas más?*
- Cambiando el valor de los sumandos:
- Cambiando el contexto: combinación de objetos;...

Escribe todas las variantes que puedas de este problema cambiando algunas de las variables anteriores. Clasifica los problemas según la dificultad para los niños. Plantea dos o tres de estos problemas a un niño de entre 8 y 10 años. Analiza las estrategias que sigue para resolverlos. ¿Son diferentes las estrategias dependiendo del problema?

4.3. Análisis de problemas propuestos por niños

a) Se pide a una serie de niños que inventen un problema, cuya solución sea 9+3. Estas son algunas de las respuestas:

- "*Tres obreros de un edificio han colocado 9 ladrillos";*
- *Juan tenía 3 Euros y su mamá le dio 9, ¿cuántos tiene ahora?*
- *Clara tenía 3 huevos y Susana tiene 9 más*

  ¿Son completos los problemas propuestos? ¿Están bien planteados? ¿A qué modelo de situaciones aditivas corresponde?

b) Se pide a una serie de niños que inventen un problema, cuya solución sea 72-29 Estas son algunas de las respuestas:

"Un cocodrilo tenía 72 dientes, al comer algo se le cayeron 29, ¿cuántos le quedaron?
"Juan tiene 20 años, el abuelo tiene 72, ¿cuántos años tiene la madre?
"En un tarro hay 72 caramelos, 29 niños acertaron y les dieron caramelos, ¿cuántos caramelos les dieron a cada uno?"
"Tomás tiene 72 bolas, Daniel tiene 29, ¿cuántas más tiene Tomás?

"Se cogen 72 lápices y 29 bolígrafos y se hace la resta"

4.4. Análisis de estrategias aditivas de los alumnos[2]

Las producciones de los alumnos de primaria propuestas en la página siguiente corresponden al siguiente enunciado:

"Tengo 45 imanes. Quiero pegar hojas en una pizarra metálica. Tengo dos tipos de hojas: pequeñas y amarillas, grandes y blancas. Utilizo 4 imanes para las hojas amarillas y 6 para las blancas. ¿Cuántas hojas puedo pegar?

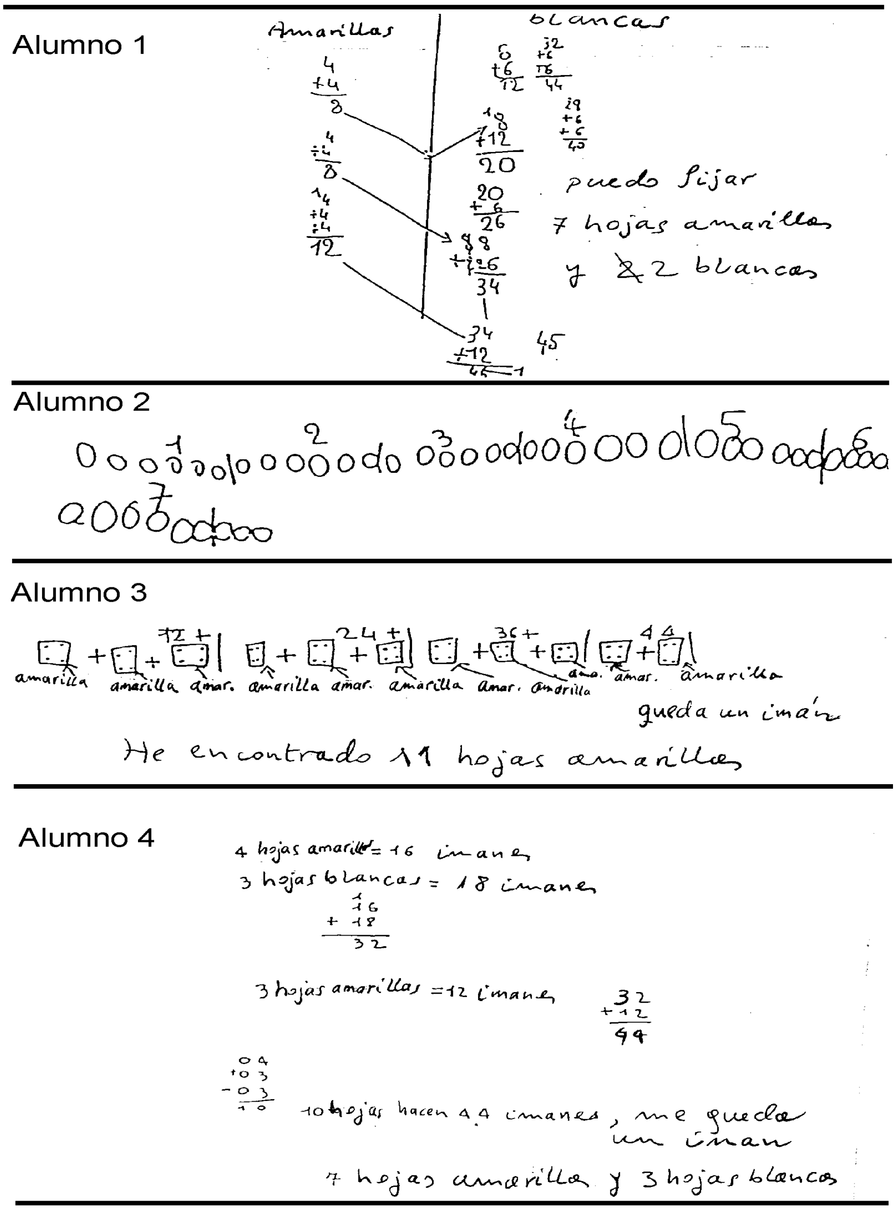
El maestro, al preparar esta actividad, ha organizado una lista de soluciones que minimizan el número de imanes no utilizados.

Nº de hojas amarillas	Nº de hojas blancas	Nº de imanes usados	Nº de imanes sobrantes
0	7	42	3
2	6	44	1
3	5	42	3
5	4	44	1
6	3	42	3
8	2	44	1
9	1	42	3
11	0	44	1

1.Interpreta los diferentes procedimientos realizados por los alumnos incluidos en el Anexo. Explicita el método de cada alumno y las presentaciones utilizadas. ¿Previó el maestro las soluciones dadas por los alumnos?
2. ¿Qué conocimientos son movilizados por los alumnos en el curso de esta actividad?
3. ¿Qué conocimientos y destrezas se pretenden con esta actividad?

Respuestas de cuatro alumnos a la tarea de fijación de hojas:

[2] Brousseau, Duval y Vinrich (1995, p. 18)



BIBLIOGRAFÍA

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, E., Rico, L. y Castro, Enr. (1988). *Números y operaciones*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos. Madrid: Síntesis.

Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Varela, A. y cols (2000). *Matemáticas (1º y 2º Primaria)*. Madrid: Anaya.

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 3:

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN ENTERA

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Decreto del MEC (BOE 26-6-91) por el que se establecen las enseñanzas mínimas del área de matemáticas en la educación primaria establece las siguientes indicaciones para el bloque temático de "Números y operaciones":

Conceptos:

1. Las operaciones de multiplicación y división y sus algoritmos.
2. Reglas de uso de la calculadora

Procedimientos

1. Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos u operatorios.
2. Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
3. Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con números sencillos.
4. Utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes

1. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
2. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Al finalizar la Educación Primaria, como resultado de los aprendizajes realizados en el área de Matemáticas, los alumnos habrán desarrollado la capacidad de:

1. Identificar en su vida cotidiana situaciones y problemas para cuyo tratamiento se requieren operaciones elementales de cálculo (multiplicación y división), discriminando la pertinencia de las mismas y utilizando los algoritmos correspondientes.

2. Elaborar y utilizar estrategias personales de cálculo mental para la resolución de problemas sencillos a partir de su conocimiento de las propiedades de los sistemas de numeración y de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas (multiplicación y división).

En el desarrollo del bloque temático sobre "Números y operaciones" el DCB incluye las siguientes orientaciones curriculares:

Hechos, conceptos y principios

3. Las operaciones de multiplicación y división.

• Situaciones en las que intervienen estas operaciones: la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto, proporcionalidad (la mitad, la tercera parte, etc.).

• Cuadrados y cubos.

• La identificación de las operaciones inversas (multiplicación y división).

• Símbolos de las operaciones

4. Correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica.

5. Algoritmos de las operaciones.
   - Jerarquía de las cuatro operaciones y función de los paréntesis.
   - Reglas de uso de la calculadora.

Procedimientos

1) Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
2) Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
3) Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
4) Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.
5) Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
6) Automatización de los algoritmos para efectuar las cuatro operaciones con números naturales.
   - Elaboración de estrategias personales de cálculo mental
   - Multiplicación y división con números de dos cifras en casos sencillos.
7) Identificación de problemas de la vida cotidiana en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones, distinguiendo la posible pertinencia y aplicabilidad de cada una de ellas.
8) utilización de la calculadora de cuatro operaciones y decisión sobre la conveniencia o no de usarla atendiendo a la complejidad de los cálculos a realizar y a la exigencia de exactitud de los resultados.

Actitudes, valores y normas

1. Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
2. Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
3. Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
4. Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En relación al aprendizaje de la multiplicación y división, para los grados 3-5, el NCTM (2000) propone el logro de las siguientes expectativas:

Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan entre sí

- Comprender los diversos significados de la multiplicación y división
- Comprender los efectos de la multiplicación y división de números naturales.
- Identificar y usar las relaciones entre las operaciones para resolver problemas, tales como la división como operación inversa de la multiplicación.
- Comprender y usar las propiedades de las operaciones, tales como la distributividad de la multiplicación respecto de la adición.

Calcular de manera fluida y hacer estimaciones razonables

- Dominar las tablas de multiplicar y dividir y usar estas combinaciones básicas para calcular mentalmente hechos numéricos relacionados, como 30x50.
- Adquirir fluidez en la realización de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales.
- Desarrollar y usar estrategias de estimación de resultados de cálculos con números naturales y juzgar que son razonables.
- Seleccionar métodos y herramientas apropiadas para hacer cálculos con números naturales incluyendo cálculo mental, estimación, calculadoras, papel y lápiz, según el contexto y naturaleza de los cálculos y usar el método o herramienta seleccionada.

Ejercicio 1:

Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de la multiplicación y división:

- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Progresión en el estudio de la multiplicación y división

Si bien la adición y la sustracción se comienzan a estudiar simultáneamente con el concepto de número, la multiplicación y la división son operaciones que requieren un cierto dominio de los números y de las operaciones de adición y sustracción.

Esto es claro si tenemos en cuenta el significado de estas operaciones. La multiplicación está ligada a verbos de acción tales como, "juntar tantas veces, repetir tantas veces, añadir tantas veces, reunir tantas veces, reiterar, etc." Es conveniente, por tanto, tener un cierto dominio de la suma que permita un cálculo seguro de los productos. Para no entorpecer el aprendizaje de la multiplicación con dificultades propias de la suma, es por lo que se suele dejar uno o dos cursos de diferencia entre el estudio de ambas operaciones.

En un principio, las situaciones problemáticas deben resolverse tanto con la suma como con la multiplicación, hasta que el alumno observe que con la multiplicación y más con el uso de las tablas, es más rápido y seguro.

Los dos términos de la multiplicación desempeñan funciones diferentes: uno de ellos es la cantidad que se repite (multiplicando). El otro factor nos dice las *veces* que se repite la cantidad inicial (el multiplicador); se refiere a un "objeto" (número de veces que se repite la acción) de naturaleza diferente que el multiplicando.

En cuanto al aprendizaje de las técnicas operatorias habría que comenzar por el producto de un dígito por un dígito, respetando las fases manipulativas, gráficas (figurativas), esquemáticas y simbólicas.

En el caso de la división se trata de, "repartir en partes iguales, hacer grupos iguales, restar reiteradamente, distribuir equitativamente, compartir, fraccionar, trocear, partir, etc." El dividendo es la cantidad a repartir, que hace, por tanto, referencia a cantidades de magnitudes discretas; por el contrario el divisor es el número de partes en que se reparte la cantidad expresada por el dividendo, siendo por tanto de naturaleza diferente.

Los requisitos básicos para afrontar las técnicas escritas operatorias de la división son los siguientes:

- Una correcta orientación espacial para las distintas direcciones que supone la técnica de la caja. Implica, simultáneamente, el manejo de las nociones de derecha, izquierda, antes, después, arriba, abajo.
- Mecanización comprensiva de la suma, resta y multiplicación.
- Práctica en la descomposición de números en órdenes de unidades (unidades, decenas, centenas, ...)

El aprendizaje del cálculo de la división requerirá también tener en cuenta las fases manipulativa, gráfica (figurativa) y simbólica, y la siguiente secuenciación:

- Una cifra en el dividendo y una en el divisor.
- Dos cifras en el dividendo y una en el divisor: ab : c, distinguiendo los casos, a>c, y a<c. Se pueden presentar dificultades cuando exista un cero en el cociente (Por ejemplo, 81: 2)
- Tres o más cifras en el dividendo y dos cifras en el divisor: abc:de. Los casos en que pueden surgir dificultades son:
    - Cuando hay que tomar tres cifras en el dividendo.
    - Cuando hay que colocar ceros en el cociente.

2.2. Principales dificultades en el aprendizaje

El aprendizaje de la multiplicación y división no está libre de obstáculos y dificultades. Indicamos algunas de estas dificultades sobre cuatro aspectos [1]:

a) Vocabulario y conceptos

En situaciones de multiplicación los términos “cada”, “a cada uno”, “para cada uno”, etc. tienen un sentido que, normalmente, no ha sido trabajo por los niños con anterioridad. Otra dificultad puede ser el empleo de la palabra ‘producto’. En el lenguaje ordinario un producto comercial es cualquier cosa que se compra, por lo que se debe prestar atención al nuevo significado que se le atribuye en la clase de matemáticas como resultado del cálculo con números.

b) Nivel de abstracción

Cuando el niño se enfrenta a la multiplicación lleva un cierto tiempo, normalmente, practicando con sumas y restas. Pero sumar y restar supone que los números que entran en esas operaciones funcionan todos dentro del mismo contexto, esto es, hacen referencia a

[1] Martínez (1993, p. 141-142)

cantidades que tienen el mismo significado en los dos sumandos y en el resultado. En algunas actividades es posible que se pida al niño que sume, por ejemplo, 3 peras y 2 kiwis para obtener 5 frutas; en este caso el niño debe entender que tanto las peras como los kiwis son "objetos" de la clase de las frutas, por lo que este problema planteará más dificultades que si la adición se refiere sólo a una clase de frutas.

En el caso de la multiplicación, el multiplicando es un número que indica la medida de una cantidad de magnitud, es decir, es un *estado*, mientras que el multiplicador nos dice las veces que se repite la cantidad inicial (es una *razón* o una *comparación*). Para calcular el coste de 3 kg de peras a 2 euros el kilo, multiplicamos 3 x 2 = 6 y decimos que el resultado es 6 euros; 3 es la medida de la cantidad de peso de las peras y 2 el precio (medida del valor económico) por unidad de peso, es decir, la razón entre el valor económico y el peso.

El resultado también puede ser una cantidad de una naturaleza diferente de los factores (área o volumen; mientras que los factores son longitudes o longitud y área). Todo esto supone un nivel de generalidad o abstracción superior y por tanto origen de dificultades en el proceso de estudio.

En el caso de la división debemos tener en cuenta la existencia de dos sentidos bien distintos para esa operación:

- según se considere como "resta sucesiva" de una cantidad fija d de otra D y lo que se debe hallar es el número de veces (q) que se puede restar hasta agotar D (la división como agrupamiento)
- o bien el sentido de "reparto en partes iguales" de una cantidad D entre un número dado de "sujetos" d, donde lo que se debe hallar es a cuánto tocan (q) (la división como distribución o reparto).

c) Dificultades en operaciones

La primera dificultad que suele pasar desapercibida es que una simple multiplicación como 123 x 12 es, en realidad, un conjunto variado de multiplicaciones que se escalonan y se combinan de acuerdo con unas reglas específicas. Este proceso queda notablemente oscurecido en el algoritmo habitual al suprimir pasos intermedios, lo que sin duda es una fuente de dificultades y errores. Estas dificultades son mayores incluso en el cálculo de la división donde deben realizarse procesos de tanteo, aparte de aplicar de manera coordinada las operaciones de multiplicación, adición y sustracción.

d) Solución de problemas

El estudio de la estructura semántica de los problemas multiplicativos y el análisis de los tipos de cantidades que intervienen como factores muestra la gran complejidad de este campo conceptual cuyo estudio integral abarca un período bastante dilatado de tiempo.

Según algunos estudios[2], parece que a los niños les resulta más fácil identificar la operación correspondiente a un problema verbal cuando se trata de una división que cuando se trata de una multiplicación. Por otro lado, parece que resuelven mejor las situaciones multiplicativas de razón que las de comparación (salvo cuando en estas últimas la incógnita está en el primer término de la comparación), resultándoles las de combinación más difíciles de resolver que las otras. Dentro de las situaciones de razón, los problemas de reparto parecen ser más fáciles que los de agrupamiento."

Ejercicio 2: Evaluación de destrezas de cálculo

[2] Puig y Cerdán (1988, p. 136)

A continuación incluimos algunos ítems de cálculo, junto con respuestas tipo dada por niños. Para cada respuesta evalúa los conocimientos que se ponen en juego, así como los posibles errores.

Item 1 Multiplica 8x4

Respuestas:

- *1x4=4, 2x4=8, 3x4=12, recita toda la tabla hasta 8x4=32, son 32*
- *seis veces cuatro son 24, siete veces cuatro son 28, ocho veces cuatro son 32*
- *Es lo mismo que sumar cuatro veces 8; son 32*
- *Creo que son 36*
- *Cuatro veces cuatro son 16; diez mas son 36 y 6 32; 32*

Item 2: Calcula 805x4

Un niño obtiene como resultado 3260, ¿Cómo puedes explicar el error?

Item 3: Calcula las siguientes divisiones:

$436 \,\big|\underline{\,4\,}$ $\quad 85 \,\big|\underline{\,5\,}$ $\quad 702 \,\big|\underline{\,3\,}$

En los siguientes resultados, ¿Qué parte del algoritmo no ha entendido el niño?

$\begin{array}{r|l} 85 & \underline{5} \\ & 11 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 436 & \underline{4} \\ & 19 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r|l} 702 & \underline{3} \\ & 20 \end{array}$

3. SITUACIONES Y RECURSOS

De acuerdo a los apartados anteriores, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones multiplicativas concretas y la de las situaciones formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las operaciones, que viene asociado a las situaciones que resuelve, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar la memorización de las tablas y las técnicas orales y escritas.

3. 1. Situaciones multiplicativas concretas

Recomendamos una secuencia de situaciones multiplicativa concretas que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [3].

Se puede animar al niño a representar los datos del problema, usando alguno de los recursos que describimos en la sección 3.3.

Las variables didácticas de las situaciones multiplicativas concretas son las siguientes:

- *Tamaño de los términos y resultado de la operación:* De 0 a 50, de 50 a 100, de 100 a 1.000, de 1.000 a 10.000, etc.
- *Estructura lógica de la situación:* Situaciones de razón, comparación, combinación y doble comparación.

[3] Situación a-didáctica, aquél momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

- *Posición de la incógnita:* En el primer estado, el segundo o la razón o comparación (en las situaciones de razón o comparación), o en los estados o comparaciones parciales o en el estado producto o comparación total (en las situaciones de combinación o doble comparación).
- *Sentido de la comparación:* De tantas veces más o de tantas veces menos.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor; situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica; situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado, gráfico, manipulativo, etc.
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

Ejercicios:

3. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 3º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones multiplicativas concretas.

4. Analizar en un libro de texto de 3º curso las situaciones multiplicativas concretas que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

3.2. Situaciones formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno multiplicaciones y divisiones formales, es decir, ejercicios del tipo 12:5, 31x4, etc. En un primer momento se animará al niño a hallar sus propias estrategias, por ejemplo, sumando o restando, para dar sentido a las operaciones.

Rápidamente se pasará a utilizar materiales estructurados (ábacos, bloques, regletas) para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas orales. Para ello, dichos materiales han tenido que ser trabajados previamente, habiéndose familiarizado el niño con las distintas configuraciones numéricas.

Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* multiplicación o división; en el caso de la división, exacta o no exacta.
- *Dirección de la operación:*

  Directa (por ejemplo, 12 x 5 = ? , 15 : 2 = ?),

  Inversa (por ejemplo, ? x 5 = 12, 16 - ? = 8),

  Descomposición, 12 = 4 x ?;   5= 15: ?
- *Tamaño de los términos y del resultado de la operación:*

  - Dobles o mitades de números de una cifra.

  - Operaciones de la tabla de multiplicar o dividir.

  - Operaciones con multiplicandos o dividendos de una cifra significativa y multiplicadores o divisores de una cifra.

  - Dobles o mitades de números de varias cifras significativas.

- Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de una cifra.

- Operaciones con multiplicandos o dividendos de dos o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de dos cifras significativas.

- Operaciones con multiplicandos o dividendos de tres o más cifras significativas y multiplicadores o divisores de tres o más cifras significativas.

- *Existencia de llevadas:* La operación implica o no llevadas.
- *Técnica de cálculo:* Uso de material estructurado; técnica oral, técnica escrita, calculadora.
- *Tipo de material:* Regletas Cuisinaire, ábaco, bloques multibase, representaciones gráficas.

Ejercicios:

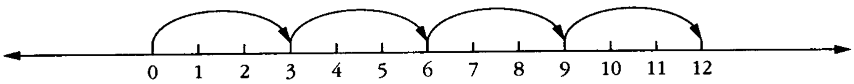
5. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 3º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas para las situaciones multiplicativas formales.

6. Analizar en un libro de texto de 3º curso las situaciones multiplicativas formales que se incluyan, identificando los valores de las variables didácticas mencionadas en este apartado.

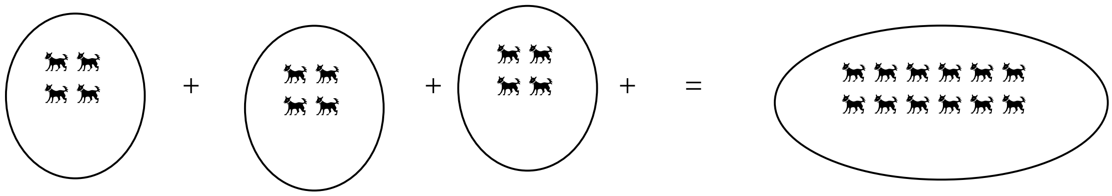
Ejercicio 7:

Enuncia problemas que correspondan a cada una de las representaciones gráficas siguientes. Identificar los valores de las variables que se ponen en juego y clasificar los problemas según el esquema dado en la sección 1.1 (parte B).

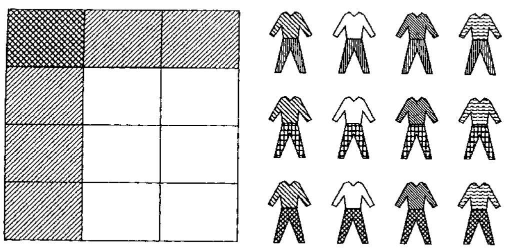
a)



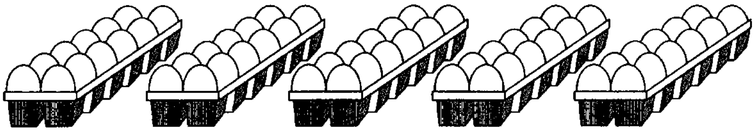
b)



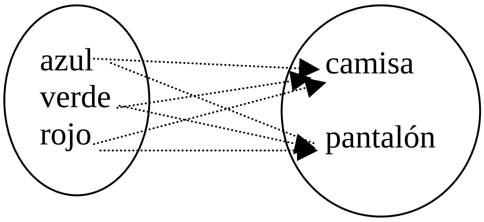
c)



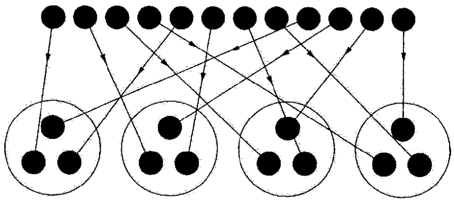
d)



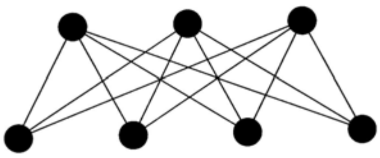
e)



f)



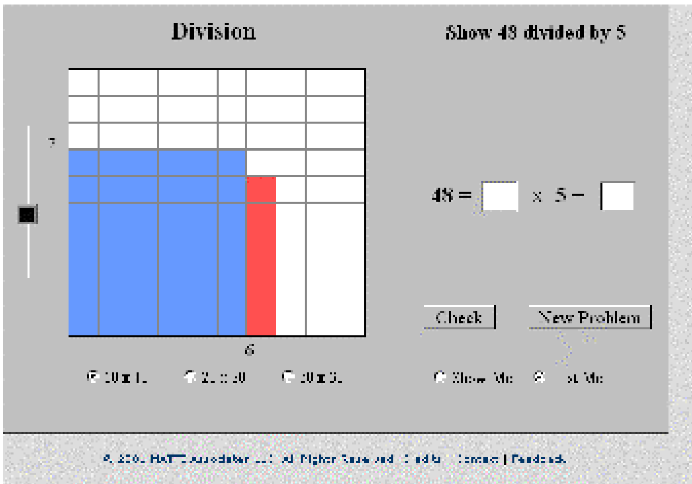
g)



3.3. Recursos en Internet

Representación rectangular de la división entera

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_193_g_2_t_1.html



Descripción:

Este recurso permite representar la división entera en un diagrama rectangular mostrando el dividendo como un rectángulo cuya base y altura son el dividendo y cociente. El resto se representa como un rectángulo adosado de base unitaria.

Permite probar el conocimiento de las tablas de multiplicar y la comprensión de las nociones de cociente y resto, planteando divisiones al alumno que él debe resolver.

Ejercicio 7:

1. ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que se suponen conocidos para usar este programa? ¿Qué conocimientos sobre el programa se deben aprender para usarlo como recurso didáctico?
2. ¿Cuáles son los nuevos conocimientos matemáticos pretendidos? ¿Cuál es su naturaleza? (adquisición de una destreza, reconocimiento de una propiedad y su justificación, etc.)
3. Describir un recurso didáctico alternativo para el estudio de los conocimientos pretendidos (p.e., uso de la calculadora, papel y lápiz, etc.). Indicar las ventajas relativas de cada recurso.
4. Diseñar una unidad didáctica para el estudio del contenido pretendido, apoyada en el uso de este recurso, indicando:
    - las consignas que se darán a los alumnos,
    - las explicaciones complementarias que se consideren necesarias sobre el uso del recurso y recuerdo de conocimientos previos,
    - uso de recursos complementarios,
    - posibles explicaciones finales para sistematizar los conocimientos pretendidos.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "multiplicación y división" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 3º a 6º de primaria.

4.2. Análisis de una prueba de evaluación[4]

En la tabla siguiente, parte izquierda, hay un ejercicio propuesto al comienzo del tercer curso de primaria, y a la derecha los porcentajes de los resultados obtenidos:

Efectúa la operación siguiente: 84 x3 -----	Respuestas correctas: 37'4% Otras respuestas: 52'2% Ninguna respuesta: 10'4%

a) La tasa de éxito es baja. ¿Es un resultado extraño?
b) Entre las respuestas erróneas están las siguientes:

84 x3 ------ 2312	84 x3 ------ 272	84 x3 ------ 242	84 x3 ------ 92

- Encuentra, en cada caso, lo que hace el niño
- Basándote en la numeración decimal, ¿cómo ayudarías a un alumno a reconstruir el algoritmo correcto?

4.3. Análisis de estrategias de cálculo mental /oral

Proponemos a un grupo de niños la siguiente tarea:
¿Cuánto es veinticinco por doce? ¿Cómo obtienes la respuesta sin usar papel y lápiz?

Para cada una de las respuestas siguientes analiza la estrategia seguida:

- "Treinta por doce es trescientos sesenta, cinco por doce sesenta, trescientos sesenta menos sesenta trescientos"
- "Veinte por doce es doscientos cuarenta, cinco por doce sesenta, doscientos cuarenta más sesenta trescientos"

[4] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995)

- "Veinticinco por seis es ciento cincuenta, y ciento cincuenta, trescientos"
- "Veinticinco por dos cincuenta, cincuenta por seis, trescientos"
- "Veinticinco por cuatro cien, por tres trescientos"
- "Veinticinco por doce es lo mismo que cincuenta por seis y lo mismo que cien por tres, trescientos"

4.4. Evaluación de resolución de problemas

Item 4. Daniel tiene 12 caramelos, María tiene 6 veces más caramelos que Daniel. ¿Cuántos caramelos tiene María[5]

Este problema fue resuelto correctamente por el 85% de niños de 5º y 6º de primaria en una muestra de 216 niños.

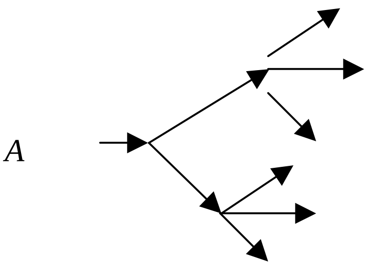
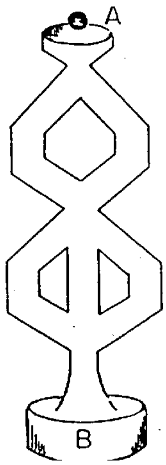
En este ítem hay diferentes variables:

- La posición de la incógnita: Estado inicial, término de comparación, estado final;
- Término de comparación: tantas veces más, tantas veces menos;
- Tamaño de los números

Escribe otros ítems similares cambiando las variables anteriores. ¿Crees que serán más difíciles? ¿Por qué?

¿Qué estrategias seguirían los niños en los distintos ítems que has escrito?

Item 5. A continuación reproducimos un ítem sobre problemas multiplicativos de combinación y las respuestas de varios chicos de 13 años. Para cada una indica los conocimientos mostrados y errores cometidos

<table>
<tr>
<td>“Dos caminos, por la derecha y por la izquierda”
“Dos caminos hasta el centro y tres mas, cinco caminos”
“ dos camimos hasta el centro; tres caminos desde el centro que se pueden combinar con los anteriores , seis caminos”
Como se ve en el gráfico desde A salen dos caminos y en el centro de pueden tomar otros tres
</td>
<td>¿Por cuántos caminos se puede ir desde A hasta B?
</td>
</tr>
</table>

[5] Castro, E.nr, Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: Irem D'Aquitaine.

Castro, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Giménez, J. y Girondo, L. (1993). *Cálculo en la escuela. Reflexiones y propuestas*. Barcelona: Graó.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

Martínez, J. (1991). *Numeración y operaciones básicas en la educación primaria*. Madrid: Editorial Escuela Española.

Maza, C. (1991). *Multiplicación y división. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les structures numériques à l'école primaire*. París: Marketing (Ellipses).

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 231-256). Madrid: Síntesis.

Segovia, I. Castro, E. Castro, Enr. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Udina, F. (1989). *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 4:

FRACCIONES Y NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

La comprensión del sistema de números racionales pone en juego diversas nociones relacionadas, como fracciones, razones, decimales, así como una rica y compleja variedad de situaciones de uso y medios de expresión. Su estudio está condicionado por la progresiva comprensión de las operaciones aritméticas y de las situaciones de medición de magnitudes no discretas. Los números racionales son el primer conjunto de experiencias numéricas de los niños que no están basadas en los algoritmos de recuento como los números naturales. Hasta este momento el recuento en una forma u otra (hacia delante o hacia atrás, con saltos o no) se podía usar para resolver todos los problemas que se presentaban. Ahora con la introducción de los números racionales el algoritmo del recuento falla (o sea, no hay un número racional siguiente a otro dado; además, las fracciones se multiplican de manera diferente, etc.). La práctica y el discurso que se pone en juego con los "números racionales" suponen un salto importante en la manera de pensar y usar los números que origina dificultades a muchos alumnos.

Las reglas de cálculo con las fracciones se pueden enseñar de manera simple: los alumnos pueden lograr una cierta destreza en el cálculo del denominador común para sumar o restar fracciones sencillas. De igual modo es posible que aprenden rápidamente las técnicas de multiplicar y dividir fracciones. Sin embargo, este enfoque algorítmico y memorístico tiene dos peligros[1]: primero, ninguna de estas reglas ayuda a los estudiantes a pensar sobre el significado de las operaciones o por qué funcionan. Segundo, el dominio observado a corto plazo se pierde rápidamente. Las reglas de operación con las fracciones llegan a parecer similares y se confunden. El enfoque de la enseñanza de las fracciones debe ser el logro del sentido numérico y la resolución de problemas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el Diseño Curricular Base para la Educación Primaria del MEC se mencionan los "números fraccionarios y decimales" en el Bloque 1, indicando las "Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales". En el apartado de Procedimientos se especifica:

1. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.
2. Interpretación, cálculo y comparación de tantos por cientos
3. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.

En las orientaciones didácticas se indica: Los números fraccionarios se abordarán como partes de un grupo o de magnitudes continuas en diferentes contextos (reparto y medida). Mediante trabajos manipulativos se comienza con medios, cuartos ..., el décimo se relacionará con el Sistema Métrico Decimal y con los números decimales. Más detalladamente se incluyen los siguientes contenidos que son pertinentes para este tema:

Hechos, conceptos y principios

1. Números fraccionarios.

[1] (Van de Walle, 2001, p. 228):

• Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

• El tanto por ciento de una cantidad (%)

Procedimientos

- Interpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento.
- Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos y operatorios (reducir una situación a otra con números más sencillos, aproximación mediante ensayo y error, considerar un mismo proceso en dos sentidos -hacia adelante y hacia atrás- alternativamente, etc.).
- Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en las resolución de problemas numéricos u operatorios.
- Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Decisión sobre la conveniencia o no de hacer cálculos exactos o aproximados en determinadas situaciones valorando el grado de error admisible.
- Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
- Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con fracciones de igual denominador.

Actitudes, valores y normas

- Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas de los sistemas de numeración, e interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
- Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
- Confianza y actitud crítica en el uso de la calculadora.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

Las nociones de fracción y número racional no son triviales, incluso para los alumnos de secundaria. Sin embargo, un primer contacto con algunas fracciones sencillas, como 1/2, 1/4, etc. se puede proponer, y de hecho los libros de texto lo hacen, para el primer ciclo de primaria. Un desarrollo más completo se inicia en los niveles 3º y 4º. Concretamente, en los grados 3-5 el NCTM (2000) incluye las siguientes expectativas relacionadas con el aprendizaje de las fracciones:

- *Comprensión de los números, modos de representación, relaciones entre números y sistemas numéricos*

  - Comprender las fracciones como partes de un todo unidad, como partes de una colección, como posiciones en la recta numérica, y como divisiones de números naturales.
  - Usar modelos, puntos de referencia y formas equivalentes para juzgar el tamaño

de las fracciones.

- Reconocer y generar formas equivalentes de fracciones usadas comúnmente, decimales y porcentajes.
- Explorar números menores que 0 ampliando la recta numérica y mediante aplicaciones familiares.
- Describir clases de números según sus características tales como la naturaleza de sus factores.

- *Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables*
    - Desarrollar y usar estrategias para estimar cálculos con fracciones y decimales en situaciones relevantes a la experiencia del estudiante.
    - Usar modelos visuales, patrones, y formas equivalentes para sumar y restar fracciones y decimales usados habitualmente.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,

- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Los niños comprenden progresivamente la noción de fracción, a partir de sus diferentes significados derivados de los diversos tipos de situaciones de uso, que no son todos igualmente sencillos de comprender para ellos. En la sección 1.1. de la parte B hemos presentado una clasificación de tales situaciones. Cada tipo de situación proporciona significados específicos que deben irse construyendo progresivamente, y cuyo desarrollo ha sido objeto de diversas investigaciones. Analizaremos el desarrollo de algunas de estos significados en lo que sigue.

Desarrollo de la fracción como parte de un todo

Parece ser que las primeras ideas de fracción de los niños son de naturaleza tridimensional e imprecisas.

Ejemplo: Un niño puede decir *"este jarro está medio lleno"*, o *"me he comido medio pastel"*, cuando, en realidad sólo queda una pequeña parte del agua o del pastel. "Medio" en este contexto es para él algo que no está completo, pero queda todavía algo.

En los experimentos de Piaget[2] se pide a los niños dividir en partes iguales figuras de papel o arcilla, doblándolas o cortándolas para efectuar un reparto equitativo. A las siguientes edades realizan los niños diferentes tipos de tareas:

- 4-5 años: Dividir en mitades figuras pequeñas y regulares;
- 6-7 años: Dividir en tercios;
- 7-9: Dividir en sextos por tanteo;

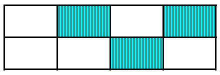
[2] Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The childs' conception of geometry.* Londres: Routledge and Kegan.

- 10 años: Dividir sistemáticamente en sextos, partiendo primero por la mitad y luego dividiendo el resultado en tres partes iguales.

En algunos casos los niños realizan estas tareas antes de estas edades o son capaces de comprender la idea de mitad, tercio y sexto aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales. Hay siete criterios para comprender la relación parte-todo:

- Considerar que una región entera se puede dividir en partes;
- Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes;
- Las partes de la partición agotan el todo;
- El número de partes puede no ser igual al número de cortes; por ejemplo con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta;
- Todas las partes son iguales;
- Cada parte en sí misma se puede considerar como un "todo";
- El "todo" se conserva, aún cuando se haya dividido en partes.

Para comprobar si los niños comprenden estas ideas se les puede plantear actividades como indicar qué fracción se representa en las siguientes regiones sombreadas:

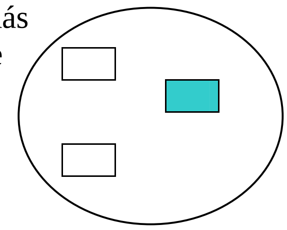


En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 3/5

En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 7/10.

La fracción como parte en un conjunto discreto de objetos

Algunos experimentos sugieren que para los niños es más difícil comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos. Por ejemplo, al preguntar a los niños qué fracción representan las piezas coloreadas dentro del siguiente conjunto, el 40% de los niños de 10 años contestan que 1/2 en lugar de 1/3, no considerando el conjunto total como un todo.



Representación de las fracciones como puntos en una recta numérica

El modelo de recta numérica de las fracciones ocasiona dificultades a los niños que no siempre son capaces de pasar de la representación de áreas a la recta o viceversa[3]. El modelo de recta numérica resulta más difícil que los anteriores.

[3] Novillis, C. F. (1976). An análisis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 131-144.

En la representación lineal se enfatiza la idea de que una fracción, por ejemplo 4/5 es esencialmente un número, de idéntica naturaleza que los números 0 y 1, pero comprendido entre ambos. A diferencia de las dos representaciones anteriores no se incorpora la idea de relación parte-todo.

Una ventaja de la representación lineal es que las fracciones impropias son más naturales y no tan diferentes de las fracciones propias y también se visualiza la idea de que las fracciones "extienden" el conjunto de los números naturales y "rellenan los huecos" dejados por éstos en la recta numérica. De esta forma se enlaza de forma natural con la idea de medida no entera.

La fracción como división indicada de dos números enteros

Al calcular porcentajes o transformar una fracción en decimales es necesario dividir dos enteros. Esta situación también se presenta en problemas como el siguiente:

Hay que repartir a partes iguales tres tabletas de chocolate entre 5 niños

Sólo un 40 % de los niños de 12 años responde correctamente a este problema, lo que sugiere que el resto no han comprendido que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Equivalencia y comparación de fracciones

Hemos desarrollado este aspecto en el tema dedicado a proporcionalidad, así como en el dedicado a probabilidad. Tanto en la proporcionalidad como en los problemas de comparación de probabilidades se ponen en juego la comparación de dos fracciones. Remitimos a estas lecciones, donde se describen las etapas que siguen los niños en la comprensión del orden y equivalencia de fracciones.

Otras dificultades y errores

Una primera dificultad en el estudio de las fracciones consiste en que los alumnos atribuyan un significado correcto a la noción de fracción, y por tanto, a cada uno de los enteros que aparecen en la escritura de una fracción. Se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales.

Algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos tras el estudio del tema, que se manifiestan incluso en niveles de secundaria, son los siguientes:

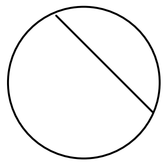
- Un entero se confunde con su inverso: 1/7 se confunde con 7/1, o bien, 1/7 y 7/1 se consideran como dos escrituras equivalentes.
- Una fracción como ½ se considera menor que la fracción 1/3, argumentando que 2 < 3.
- El conocimiento de los naturales puede ser un obstáculo para el dominio de los números racionales; por ejemplo, algunos niños pueden afirmar que 1/3 < 1/5 explicando que 3 <5.
- La mitad de la fracción 1/6 se designa frecuentemente por la fracción 1/3 (que es en realidad el doble de 1/6), argumentando que la mitad de 6 es 3.
- Para multiplicar entre sí dos fracciones, se les reduce a un común denominador, después se multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. Se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación.

Remitimos al lector al libro de Llinares y Sánchez (1988, cap. 6) para una descripción más detallada del tipo de errores más frecuentes en el estudio de las fracciones por los niños, con explicación de su posible origen y actividades para su prevención y remediación.

Ejercicio 2:

En la tabla siguiente se incluyen ejemplos de items de evaluación usados en distintas investigaciones y porcentajes de respuestas correctas. Para cada uno de ellos estudia qué aspecto de las fracciones se evalúa. Trata de explicar las diferencias en los índices de dificultad.

Item 1[4]. *¿Está dividido este círculo en dos mitades? ¿Por qué?*



El 89% de los niños de 12-13 años dieron una respuesta correcta, mientas que otros opinaron que sí. Para ellos “dos mitades” era equivalente a dos trozos.

Item 2. *En una caja de 12 huevos hay 5 cascados. ¿Qué fracción de huevos está cascada?*
El 70 % de los niños de 12-13 años dan una respuesta correcta..

Item 3. *Juan y Andrés reciben su paga semanal. Juan gasta la cuarta parte y Andrés gasta la mitad de su paga. ¿Es posible que Juan gaste más que Andrés? ¿Por qué?*
En este ítem el 41% de los niños de 12 años piensan que es imposible.

Item 4[5]. *Supongamos que x/y representa un número. Si se duplican los valores de x e y el nuevo número es:*
a) La mitad de grande que x/y
b) igual a x/y
c) doble que x/y
El 20 por ciento de los niños de 11 años dan una respuesta correcta a este ítem

Item 5. *En una clase hay 40 alumnos, 3/5 son niñas. ¿Cuántas niñas hay en la clase?*
El 22 % de los niños de 11 años dan la respuesta correcta

3. SITUACIONES Y RECURSOS

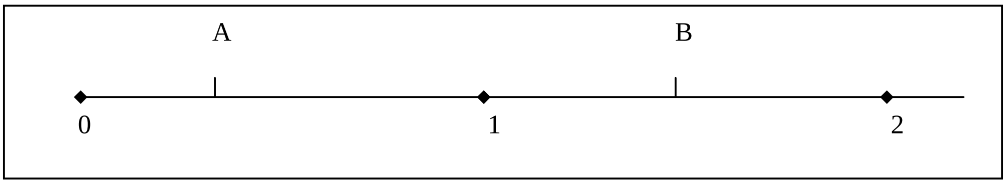
De acuerdo a los apartados anteriores, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones concretas y la de las situaciones formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las fracciones, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar las técnicas de cálculo.

3.1. Situaciones concretas

[4] Hart, K. (1980), *Secondary School Mathematics Project.* Research Monograph. Londres: Chelsea College.
[5] NAEP, 1980

Las actividades introductorias para facilitar “el primer encuentro” con las fracciones se deben apoyar en las diversas representaciones: modelos de áreas, conjuntos discretos, recta numérica, etc.

Por ejemplo, en lo que concierne a la recta numérica, podemos proponer a los niños que tengan que comunicar a otros la posición exacta de ciertos puntos (correspondientes a 1/3 y 5/3, por ejemplo) marcados sobre una semirecta graduada, en la cual se han marcado claramente los números 0, 1 y 2, los cuales indican la unidad de longitud elegida para graduar la semirecta.



Los niños deberán descubrir en primer lugar la relación entre la posición de estos puntos y la división de la longitud unidad en partes iguales, y después inventar una escritura que les permita comunicar estas posiciones a sus compañeros, los cuales sólo tienen una semirecta graduada con la misma unidad de longitud sobre la que aparecen marcados el 0, 1, y 2.

En este contexto, la notación de fracción, que podrá ser propuesta por el maestro durante la corrección de la actividad, surgirá como una respuesta a un problema que tiene pleno sentido para los niños y los papeles del numerador y del denominador se distinguirán rápidamente, ya que cada uno proporciona una información necesaria para el posicionamiento correcto del punto.

Esta misma situación se puede también explotar para que los niños “descubran” que las fracciones 1/3 y 2/6, por ejemplo, son dos codificaciones diferentes de la posición de un mismo punto y, por tanto, existen numerosas fracciones equivalentes a una fracción dada. A partir de esto, la investigación de las reglas de simplificación de las fracciones se puede iniciar con fracciones simples.

Este tipo de introducción, además del interés que presenta para dar sentido a la noción y la notación de las fracciones, permite también no limitarse a las fracciones inferiores a la unidad, como ocurre habitualmente con el contexto del reparto de las tartas que suele usarse con frecuencia.

Esta presentación no es suficiente para dar todo su sentido a las fracciones. Se debe acompañar con otras situaciones en las que esta herramienta se use no solamente como fracción de longitud, sino también como fracción de área o de tiempo, y en general con situaciones en las que se pongan en juego los diversos contexto de uso de las fracciones.

Recomendamos una secuencia de situaciones concretas, que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas [6].

Se puede animar al niño representar los datos del problema, usando alguno de los recursos que describimos en la sección 3.3.

Las variables didácticas de las situaciones de introducción de las fracciones son las siguientes:

[6] Situación a-didáctica, aquel momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia.

- *Significado de las fracciones:* parte- todo, comparación parte- parte, división de dos números, comparación de dos medidas, punto en la recta numérica, etc.
- *Tipos de fracciones:* igual- distinto denominador, menores mayores que la unidad, enteras o no enteras, denominadores múltiplos unos de otros o no, etc.
- *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica. Situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.
- *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado.
- *Posición de la incógnita en las operaciones:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales.
- *Número de datos:* Dos, tres o más.

Ejercicios:

2. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 5º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de las situaciones concretas de uso de las fracciones.

3. Analizar en un libro de texto de 5º de primaria si se incluyen o no situaciones concretas en el estudio de las fracciones y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.2. Situaciones formales. Aprendizaje de algoritmos

En estas situaciones se presenta al alumno operaciones formales con las fracciones, es decir, ejercicios del tipo: 5/7+4/5, etc. En un primer momento se animará al niño a hallar sus propias estrategias, para dar sentido a las operaciones.

Rápidamente se pasará a utilizar diversas representaciones (áreas, conjuntos, recta numérica, diagramas en árbol) para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas de cálculo. Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

- *Tipo de operación:* suma, resta, multiplicación y división.
- *Dirección de la operación:*

  Directa (por ejemplo, 2 / 5 x 1/4 = ?

  Inversa (por ejemplo, ? x 2/ 5 = 1/10
- *Tipos de fracciones, tamaño de los términos y del resultado de la operación:*
  1. Suma y resta de fracciones de igual denominador;
  2. Suma y resta de fracciones, denominadores múltiplos uno de otro;
  3. Suma y resta de fracciones con denominadores no múltiplos, fácilmente descomponibles en factores;
  4. Suma y resta de fracciones cualesquiera;
  5. Multiplicar /dividir una fracción por un entero;

6. Multiplicar /dividir dos fracciones;
7. Operaciones combinadas

- *Técnica de cálculo:* Uso de material o representaciones gráficas, técnica escrita.
- *Tipo de material o representaciones usadas;* conjuntos de objetos, modelos de áreas, recta numérica, etc.

Ejercicios:

4. Preparar una secuencia de tareas para alumnos de 6º curso en las que se incluyan una muestra de valores de las variables didácticas identificadas en el estudio de las situaciones formales de uso de las fracciones.

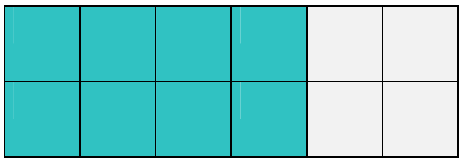
5. Analizar en un libro de texto de 6º de primaria si se incluyen o no situaciones formales en el estudio de las fracciones y los valores de las variables didácticas tenidas en cuenta.

3.3. Modelos gráficos para el estudio de las fracciones

A lo largo del tema hemos mencionado algunas representaciones gráficas mediante las cuales se expresan situaciones de uso de las fracciones. El uso de estas representaciones es una opción del profesor, por lo que se trata de una variable didáctica de las situaciones concretas en el estudio de las fracciones.

Modelos de áreas

Una figura, principalmente rectangular o circular se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada.



¿Qué fracción expresa la relación entre el área de la superficie sombreada y la superficie del rectángulo mayor?
¿Cuánto mide el área sombreada si usamos como unidad de medida el rectángulo mayor?

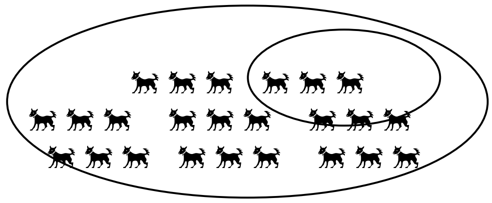
Este tipo de situaciones de medida o comparación de áreas (con figuras rectangulares o circulares) se pueden utilizar como modelos de otras situaciones de contextos no geométricos. Por ejemplo,

"Tenemos que repartir 120 euros entre 12 personas. ¿Qué fracción del total corresponde a 8 personas? ¿Cuántos euros corresponden a estas 8 personas?"

Esta situación se puede representar "visualmente" con el gráfico o modelo de áreas anterior interpretando que el rectángulo mayor "representa las 12 personas (el todo o unidad), y la parte sombreada a las 8 personas.

Representación mediante conjuntos

Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.



Modelos lineales

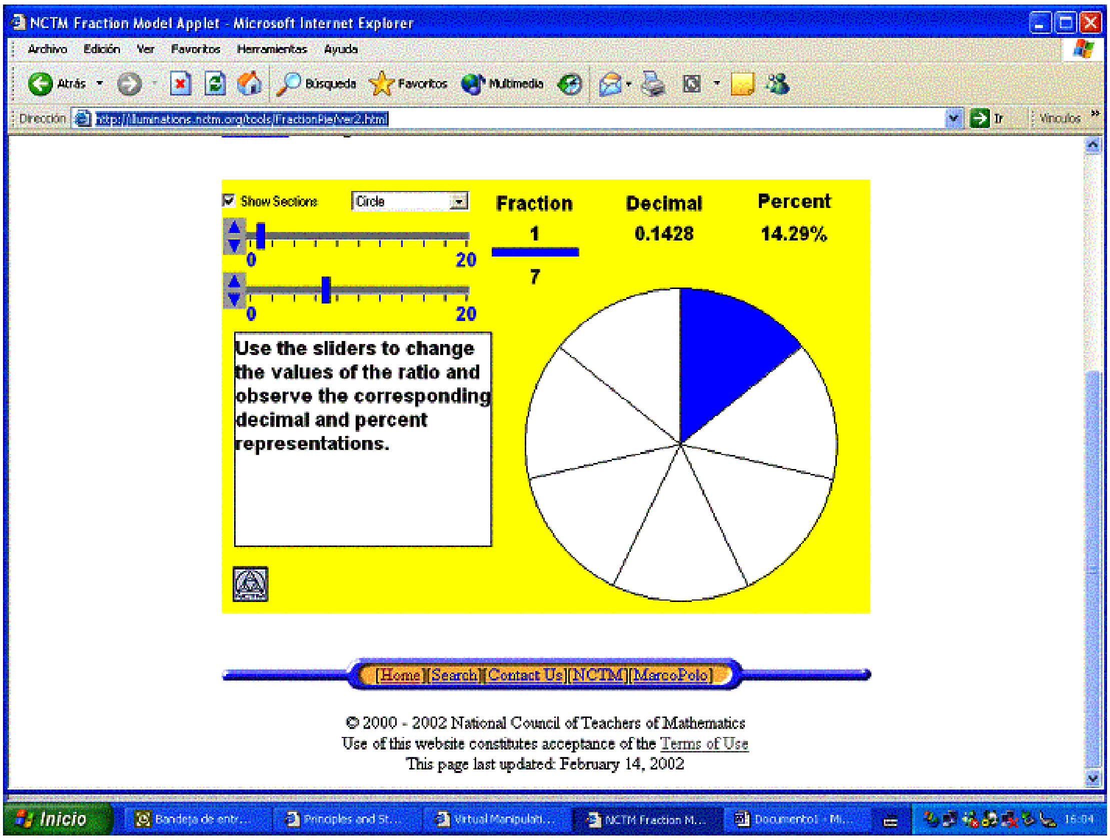
Al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1/4	1/2	3/4	1	5/4	3/2	7/4	2

3.4 Recursos en Internet

Modelos de fracciones y expresión de números racionales:

http://illuminations.nctm.org/tools/FractionPie/ver2.html



Descripción

Permite explorar varios modelos para representar fracciones con numeradores y denominadores ajustables. Un mismo número racional se usa para expresar una parte de un todo en los casos en que el todo viene dado mediante un círculo, un rectángulo y un conjunto discreto de fichas circulares. Se comparan simultáneamente tres notaciones: fracción, decimal y porcentaje.

Los valores de los numerador y denominador se agrupan en tres versiones:
Versión 1: El rango del numerador está limitado a valores de 0 a 20, y el denominador toma valores fijados en 1, 2, 4, 5, 8, 10 y 20.
Versión 2: El rango del numerador y el denominador varia entre 0 y 20
Versión 3: El rango del numerador y el denominador varia entre 0 y 100.

Tanto el numerador como el denominador se indican en la recta numérica y se cambian desplazando cursores.

Ejercicio 6:

1. Explorar las tres versiones del programa, representando fracciones mayores y menores que la unidad y comparando las tres representaciones gráficas del todo y las partes.
2. Escribir una ficha de trabajo para los alumnos de 6º curso de primaria proponiendo una secuencia de tareas de expresión y representación de fracciones equivalentes mayor es y menores que la unidad.
3. Identificar las características ergonómicas (eficacia, rapidez, posibilidades de comparación, etc.) del uso del programa en relación al contexto tradicional de uso de papel, lápiz y calculadora.
4. La expresión decimal de los racionales no decimales no se puede realizar correctamente con este programa. ¿Por qué? ¿Qué tareas y recursos puede utilizar el profesor para que el uso del programa no genere un obstáculo didáctico en relación a la notación decimal y porcentual?
5. ¿Crees que la representación independiente del numerador y el denominador en la recta numérica puede ser un obstáculo didáctico para la representación en la recta de los números racionales¿ ¿Cómo se puede evitar?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 3er ciclo de primaria y 1er ciclo de secundaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "fracciones y números racionales" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado en la situación introductoria inicial.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema que consideres potencialmente conflictivos para los alumnos de dichos niveles.

4.2. Análisis de respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación

En los siguientes ejemplos analiza las tareas presentadas y las respuestas de los niños, indicando los errores subyacentes y la forma en que podría ayudar la maestra a superarlos.

1. Una maestra pide a sus alumnos que ordenen de menor a mayor las fracciones 1/4 y 1/6.

El 20% de los niños dicen que ¼ < 1/6 por que 3<5.

¿Qué explicación puede tener esta respuesta de los niños?. ¿Qué podría hacer la maestra para que los alumnos comprenden la ordenación de fracciones?

2. En las siguientes tareas que piden hallar el todo, conocida una parte, que se expresa mediante una fracción del todo. Explica por qué esta actividad es difícil y qué puede hacer el maestro para ayudar a los alumnos.

"Si esta región $\boxed{}$ es los 3/5 de una región encuentra la región unidad"

"Si esta colección de bolas

o o o o o
o o o o

son los 3/5 de un total de bolas encuentra el total de bolas".

3. Un maestro pone este problema a sus alumnos:
"De los 25 alumnos de la clase 3/5 son niñas. ¿Cuántos niños hay?"
Un alumno responde así:25 –3/5 =125/5 – 3/5 = 122/2 niños
Explica cómo ayudarías a este alumno para que comprenda el enunciado y la manera de resolverlo.

4. Indicamos a continuación la respuesta de un estudiante al siguiente problema:
"De la superficie total de España (504.000 km^2, aproximados), los dos tercios son de paisaje llano. ¿Cuántos kilómetros cuadrados representa esta fracción?.
Respuesta de un alumno:

504000 ______ 3/3
x ______ 2/3

$$x = (504.000x\ \ 2/3\ )/(3/3) = 336.000\ km^2$$

¿Cómo explicarías la solución de este problema sin usar "la regla de tres"?

4.3. Análisis de experiencias didácticas

A. El espesor de una hoja de papel

Analiza la siguiente experiencia de estudio de las fracciones y racionales diseñada y experimentada por G. Brousseau[7]. Se trata de una secuencia de estudio que permite a los niños "reinventar" los números racionales bajo la dirección del profesor. Al finalizar:

- Enumera los conocimientos y habilidades previas que consideras necesarias para la realización de estas actividades
- ¿Cuál es el objetivo que se persigue en cada una de las secuencias en que se ha dividido la situación didáctica?
- Describe los conocimientos matemáticos que se ponen en juego a lo largo del proceso de estudio.
- Confronta las respuestas dadas a estas cuestiones con el análisis que se hace en Centeno (1988, pags. 124-125).

Tarea: Se pide a los alumnos medir el espesor de hojas de papel de diferente grosor con un calibrador; como las hojas son muy finas, se propondrá que las midan no de una en una, sino un paquete con un número determinado de tales hojas.

[7] siguiendo el resumen elaborado por Centeno (1988).

Como resultado obtienen dos números: el número de hojas que tiene el paquete y la medida en milímetros del espesor del paquete. Estos pares de números se pueden comparar, sumar, restar, multiplicar por un número natural, y también dividir.

Material necesario:

- Unas 2000 hojas de papel del mismo tamaño (medio folio, por ejemplo), del mismo color, pero de 5 grosores (papel de calco, folios normales, cartulinas, etc.). Se distribuyen en 10 cajas, dos de cada grosor, que contienen cada una alrededor de 200 hojas.
- Calibradores que permitan medir espesores con una precisión del milímetro (dos por cada grupo de cinco alumnos).
- Un biombo o una cortina que permita dividir la clase en dos. Se puede prescindir de esto si el local es bastante grande como para separar a los alumnos en dos grupos de forma que puedan ver los niños de un grupo lo que hacen los del otro grupo.

Organización de la clase

La situación se desarrolla a través de ocho actividades, que se realizan a lo largo de nueve secuencias de 60 a 70 minutos. El esquema de organización es similar para cada una de las secuencias. Hay acciones individuales, en grupos pequeños, puestas en común entre grupos pequeños, puestas en común de toda la clase, y tiempos destinados a hacer la síntesis de lo adquirido.

1. Primera secuencia S_1: El objetivo es medir el "espesor de una hoja de papel"

Se divide el aula en dos partes con un biombo. En cada parte se colocan cinco cajas conteniendo cada una 200 hojas de papel.

Situados los niños en una de las partes del aula, el maestro los distribuye en grupos de 4 ó 5.

El maestro dice: *"Mirad las hojas que he preparado en las cajas A, B, C, D, E. En cada caja todas las hojas tienen el mismo espesor y cada caja tiene hojas de espesor distinto. ¿Podéis apreciar las diferencias de unos espesores a otros?*

Se hacen circular entre los alumnos algunas hojas de forma que todos los niños puedan tocarlas y compararlas

- *¿Cómo podemos distinguir unas hojas de otras?*

  Algunos niños responden que por el peso.
- *Debéis inventar otra manera de designar y reconocer cada uno de estos tipos de papel, de forma que los podamos distinguir sólo por el espesor.*

Los niños intentan al principio medir el espesor de una hoja, pero pronto se dan cuenta de que no es posible.

Después empiezan a medir paquetes de hojas, las cuentan y ya tienen un código que puede servir para designar los espesores. Dan, por ejemplo, 70 hojas 3 mm; 50 hojas 3 mm; etc.

Cuando en todos los grupos se ha encontrado este sistema de designación de hojas se pasa a un "juego de comunicación". Cada grupo se subdivide en dos: uno de emisores y el otro de lectores.

Para probar el código elaborado, todos los emisores se colocan en una de las dos partes del aula y los lectores en el lado opuesto. Los emisores eligen una de las cajas y escriben mensajes que envían a los niños con los que han elaborado antes el código. Los lectores deben reconocer la hoja de que se trate y para asegurarse de que el código ha funcionado deben comunicar después con los emisores.

El maestro pasa los mensajes de unos a otros, recibe las respuestas y verifica con todo el equipo si se ha acertado o no. Para escribir los mensajes ha preparado previamente unas tarjetas en las que los niños deben escribir el número de su equipo, los mensajes enviados (numerados: juego 1, juego número 2, etc.) y si han sido acertados o no.

Cuando todos los equipos han hecho varios juegos, y todos los niños han sido emisores y receptores más de una vez, se pasa a una tercera fase, que consistirá en una puesta en común de todos los equipos.

El desarrollo de las siguientes secuencias es el siguiente:

S_2: Comparar los espesores (pares de números) y hallar pares equivalentes.
S_3: Determinar clases de equivalencia de pares de números, observando que un mismo espesor se puede representar por muchos pares, que son por tanto equivalente.
S_4: Hallar el espesor de una hoja gruesa formada por dos hojas pegadas (esto lleva a dar significado a la multiplicación de espesores –fracciones- por un número natural).
S_5: Generalizar los procedimientos descubiertos calculando sumas de espesores.
S_6: La diferencia de dos espesores permitirá a los niños dar significado a la diferencia de fracciones.
S_7: Dar significado al producto de espesores por un número natural, hallando el espesor de un cartón grueso formado por varias hojas del mismo grosor (producto de un racional por un natural).
S_8: Evaluar el espesor de un cartón comparándolo con un milímetro (se trata de saber si una fracción es mayor, menor o igual a un milímetro).
S_9: Conocido el espesor de un cartón formado por un número de hojas de igual espesor hallar el espesor de una hoja. Esta actividad dará significado a la división de un racional por un entero.

B. Reproducción de un segmento con una unidad no convencional

Se pide a los futuros profesores leer la sección 8.5.2. del libro de Centeno (1988) donde se describe otra situación didáctica específica para dar sentido al uso de las fracciones en el contexto de medidas lineales y realizar un análisis semejante al anterior.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, Enc. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la educación primaria. Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.285-314). Madrid: Síntesis.
Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.
Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.
Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis
Krause, E. (1991). *Mathematics for elementary teachers* (2nd ed.).Toronto: D.C.Heath.
Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. París: Editions Marketing (Ellipses).
Post, Th. R. (Ed.) (1988). *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 5:

NÚMEROS Y EXPRESIONES DECIMALES

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

Los números decimales se han convertido en los últimos años en protagonistas de todos los cálculos -hasta el punto de que en la práctica desplazan completamente a las fracciones - debido a la disponibilidad creciente del uso de calculadoras y de ordenadores que hacen las operaciones con ellos (Centeno, 1988, p. 17).

Los símbolos 3.75 y $3\frac{3}{4}$ representan la misma cantidad, aunque tengan un aspecto tan diferente. Esta apariencia hace que para los niños, el mundo de las fracciones y el de los decimales sean muy distintos. Incluso las personas adultas tienden a pensar en las fracciones como conjuntos o regiones (tres cuartos *de* algo, por ejemplo), mientras que consideran los decimales más como números. La realidad es que las fracciones y los decimales son dos formas diferentes para representar las mismas ideas, o si se prefiere para describir y manipular el mismo tipo de situaciones.

Uno de los fines principales de la enseñanza de las fracciones y decimales será que los estudiantes vean ambos sistemas notacionales como modos de representar los mismos conceptos, aunque ciertamente con ventajas distintas según las situaciones. Por ejemplo, en muchos contextos, es más fácil pensar sobre 3/4 que en 75 centésimas o 0.75. Inversamente, el sistema decimal hace más fácil la expresión de números que están próximos a 3/4, como 0.73, o 0.78. El uso del sistema decimal es claramente ventajoso en dispositivos digitales, como calculadoras, ordenadores y mediciones electrónicas[1].

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el Decreto del MEC (BOE 26-6-91) se mencionan los números decimales en los siguientes términos en el apartado de *conceptos*:

- Números fraccionarios y decimales

Estas orientaciones curriculares fueron formuladas de manera más explícita en el DCB (Documento Curricular Base, MEC, 1989). Entre los objetivos generales que hacen referencia al estudio de los "Números y operaciones" se incluyen las siguientes indicaciones.

Hechos conceptos y principios:

• Correspondencias entre fracciones sencillas y sus equivalentes decimales.

En el apartado de *procedimientos*:

2. Comparación entre números naturales, decimales (de dos cifras decimales) y fracciones sencillas mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unos en otros.

15. Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma y resta con números decimales de hasta dos cifras y con fracciones de igual denominador.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[2]

[1] Van de Walle (2001), p. 243.
[2] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston: Va: NCTM.

En los Estándares Curriculares y de Evaluación del NCTM (1989) las orientaciones curriculares son algo más explícitas. Concretamente se dice que en los niveles P-4 (Infantil a 4º curso de Primaria), los niños empiezan a encontrarse con decimales en multitud de situaciones -con calculadoras y medidas métricas, en tablas de datos, y en actividades cotidianas como el uso de un cronómetro digital. Por tanto, el currículo tiene que hacer énfasis en el desarrollo de conceptos decimales.

Continúan diciendo que el enfoque de los decimales ha de ser parecido al trabajo con fracciones, es decir, hacer hincapié de forma clara y continua en modelos y en lenguaje oral y más tarde conectar este trabajo con los símbolos. Esto es necesario si se quiere que los decimales tengan sentido para los estudiantes y que éstos hagan de ellos un uso intuitivo. Al explorar la idea de décimas y centésimas partes con modelos puede incluirse un trabajo previo con decimales equivalentes, recuento de sucesiones, comparación y ordenación de decimales, y suma y resta.

La enseñanza y el aprendizaje de los decimales ha de incluir experiencias informales que establezcan la relación entre fracciones y decimales para que los estudiantes comiencen a establecer una conexión entre los dos sistemas. Por ejemplo, si los estudiantes reconocen que 1/2 es la misma cantidad que 0'5, pueden usar esta relación para determinar que 0'4 y 0'45 son un poco menos que 1/2 y que 0'6 y 0'57 son un poco más que 1/2. Las actividades de este tipo ayudan al niño a dotar de significado a los números decimales.

En los Principios y Estándares 2000 (NCTM, 2000) aparecen los decimales en los siguientes términos:

Grados 3-5:

- comprender la estructura posicional del sistema de numeración decimal y ser capaz de representar y comparar números naturales y decimales;
- reconocer y generar formas equivalentes de fracciones, decimales y porcentajes usados comúnmente.

Ejercicio:

1. Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números decimales,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu país o Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Los números decimales empiezan a utilizarse en 4º nivel de primaria generalmente en un contexto de medida. Por ejemplo, la expresión decimal 1'25 m es una manera sencilla y cómoda de decir que al medir el largo de una mesa se ha necesitado un metro, 2 decímetros y 5 centímetros. La multiplicación de un número natural por un decimal, como 4 x 0'37, se asocia con la suma reiterada: 0'37 + 0'37 + 0'37 + 0'37.

En cursos superiores se encontrarán con problemas que llevan a multiplicar, por ejemplo números como 0'37 x 0'37, sin que estos números se interpreten como medidas. Los momentos más delicados del proceso de enseñanza - aprendizaje son aquellos en los que las propiedades tanto de los números como de las operaciones con los números naturales no pueden extenderse a los números decimales[3].

La comprensión de la relación entre las fracciones y su escritura decimal es similar a la comprensión de la relación entre diferentes sistemas de numeración, por ejemplo entre el sistema de numeración romana y el posicional decimal. El niño debe comprender que en ambos casos el número representado es el mismo y lo que cambia es la forma de representarlo.

En principio, para los niños será más fácil comprender la idea de fracción, a través de sus diferentes representaciones, como la relación parte-todo que su expresión decimal. Pero a la larga esta comprensión tendrá una gran ventaja en los algoritmos y resolución de problemas.

Para iniciar con éxito el estudio de la representación decimal de las fracciones es necesario que el niño tenga soltura y comprensión en los convenios del sistema decimal de representación de los enteros y comprenda el principio del valor de posición. Asimismo debe comprender los diversos significados subyacentes a la fracción decimal, por ejemplo “dos décimas”, que estudiamos en la lección anterior para poder dotar de significado a la parte decimal del número.

Dado que la representación decimal de un número se basa en la noción de fracción (décimas, centésimas, milésimas), la comprensión de la equivalencia tiene la misma importancia al estudiar decimales que al estudiar fracciones. Por ejemplo, hay niños que tienen dificultad en encontrar equivalentes 2 décimas a 20 centésimas, es decir, 0'2 a 0'20. Algunos niños consideran que 0'20 es mayor.

Conflictos en el aprendizaje de los números decimales

La escritura decimal de los números ha producido confusiones entre lo que es un número decimal y lo que no es un número decimal, identificando más al número decimal por su escritura decimal que por sus propiedades intrínsecas, lo que ha originado cierta ambigüedad entre la escritura decimal y el número decimal, de tal manera que decimal está asociado a números con comas en contraposición al número entero o número sin comas; esta acepción del término decimal es origen de diferentes errores[4].

Los errores más frecuentes, observados de manera persistente, tras el estudio del tema por los alumnos de primaria y primer ciclo de secundaria son clasificados y descritos por Centeno (1988) en cuatro apartados. Indicamos algunos ítems usados en evaluaciones con ejemplos de respuestas erróneas.

Errores relacionados con la lectura y escritura de los números: valor de posición

Item 1. ¿Cuál de los números siguientes es 37 milésimas? 0’037; 0’37; 37; 37000.

En algunas investigaciones el 88% de los niños de nueve años y el 40% de los de trece responden 37000. Parece que una buena parte de los alumnos de estas edades interpreta centésimas como enteros, y piensan que para que haya milésimas tiene que haber tres ceros.

Item2. Se pide a los alumnos que cuenten por centésimas.

Es fácil obtener la respuesta siguiente: 14’08; 14’09; 15.

---

3 Centeno (1988), p. 151.

4 Socas (2001).

Item 3. Seis décimas se escribe 0’6 como decimal. ¿Cómo escribes tres centésimas?.
Algunas respuestas erróneas obtenidas son: 0’300; 3’00; 3’0; 3’100; 00’3; 0’3. Puesto que la base de la escritura de números decimales es el sistema de numeración decimal, no se puede esperar que los niños comprendan la escritura de los decimales menores que la unidad mientras no esté bien comprendido el dominio del sistema de numeración decimal para la escritura de los números enteros.

Errores relacionados con el cero

Algunos alumnos ignoran el cero e interpretan 0’036 como 36, perdiendo la estructura global del número y tratándolo sólo como un número entero. 1’27 se considera distinto de 1’270.

Errores en la interpretación de decimales como fracciones

Item 4. Escribe una fracción para completar la igualdad 6’28= 6x1+2x ___ + 8x1/100
El porcentaje de niños que realizan correctamente este ejercicio no llega a veces al 10 % de los niños de 13 años.

Errores relacionados con las operaciones
A continuación mostramos respuestas de niños a algunas tareas. Identifica y explica los errores cometidos.

1) 0’7 + 0’4 + 0’2 = 0’130; 17’3 + 21’8 = 38’11
2) Hacer el número 437’56 diez veces mayor. Respuesta: 437’560
3) 3’15 x 10 = 30’150
4) 3’15 x 10 = 3’150
5) 2’3 x 2’3 = 4’9
6) 4 x 2’3 = 8’12
7) 2’12 : 2 = 1’6

Una parte importante de los alumnos piensa que al multiplicar dos números siempre se obtiene otro número mayor que los dados, y que al dividir se obtiene uno menor.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

3.1. Introducción del uso de la coma decimal en el contexto de la medida de longitudes

El estudio de la medida de longitudes puede ser una buena oportunidad para introducir el uso de la coma decimal, como convenio de expresión de la medida de un objeto realizada, por ejemplo, con varias unidades como decímetros, centímetros y milímetros (medida compleja).

En el transcurso de una situación de medida de bandas de longitudes dadas, usando, bien la regla graduada, o bandas de 1dm y 1cm, los alumnos pueden obtener resultados como: 2dm y 5cm.

¿Cómo podemos expresar este resultado usando como única unidad el dm?

Después de animar a los niños a proponer sus propias soluciones se puede introducir el convenio del uso de la coma: 2 dm 5 cm = 2' 5 dm

Como ejercicio complementario podemos pedir que los niños expresen con decimales medidas tales como:

25 cm 6 mm: unidad elegida: el cm →
unidad elegida: el dm →
unidad elegida: el m →

La misma actividad con: 14 m 4 cm.

Los niños estarán contentos de haber aprendido a escribir los "números con coma". Muchos recuerdan los precios que han visto en los almacenes y piden otros ejercicios. Es evidente que los niños no dominan todavía el empleo de la coma. Es necesario un gran número de actividades en campos diferentes (precios, pesos, capacidades, etc) para lograr ese dominio[5].

3.2. Modelos gráficos y concretos para representar fracciones decimales[6]

La figura 1 muestra un dispositivo que permite representar, mediante un modelo de áreas, décimas y centésimas. Cada disco está dividido en diez partes iguales mediante diámetros; cada una de las partes corresponde a una décima. A su vez cada sector circular de una décima está dividido mediante 10 marcas igualmente espaciadas en los bordes, quedando representadas las centésimas. Cada disco se corta a lo largo de un radio; esto permite encajar dos de tales discos, como se muestra en la figura, con lo cual se puede mostrar cualquier cantidad de centésimas. En el ejemplo, la región sombreada, intersección de dos discos, representa 25 centésimas (25/100 = 0’25)

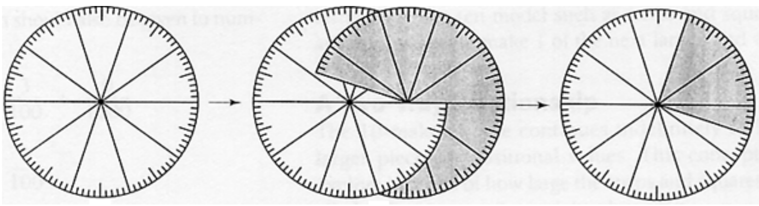


Figura 1: Discos de décimas y centésimas

La representación más común de las fracciones decimales, y por tanto, para las décimas y centésimas, es una cuadrícula de 10 x 10, como se muestra en la figura 2 a). Los cuadrados se pueden reproducir en cartulina o papel para que los alumnos puedan rayar la fracción deseada. El decimal 2’13 quedará representado con dos cuadrados completos (2 unidades enteras) y sombreando 13 cuadrados pequeños. Una variante de este material es el representado en la Fig. 2 b), en la cual la unidad será representada por el cuadrado de 10 x 10, la décima por la banda de 10 cuadraditos y la centésima por cada cuadradito. En la figura se representa, por tanto, el decimal 1’36.

[5] Nadine Brousseau (1992).
[6] Van de Walle (2001).

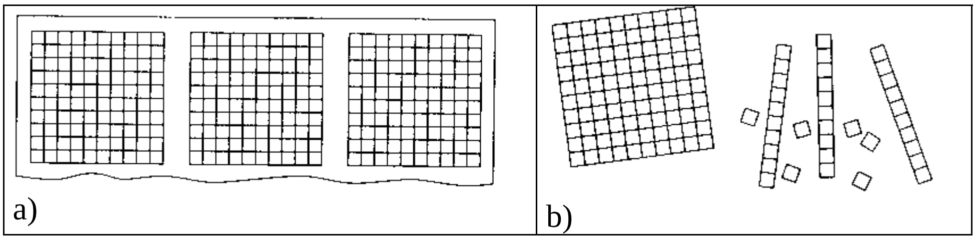


Figura 2: Cuadrículas de 10 x 10

Los bloques multibase, de base 10, con bloques, placas, varillas y cubos pequeños permiten representar hasta las milésimas, si consideramos que el bloque mayor es la unidad.

Modelos lineales

Una buena representación material de las fracciones decimales es el metro de varillas plegables, con divisiones en los decímetros, centímetros y milímetros.

3.3. Conexión entre fracciones y decimales[7]

Para comprender la relación entre los dos sistemas de representación, fraccional y decimal, los alumnos deberán realizar actividades de traducción entre ambos.

En la figura 3 se muestra la fracción decimal 35/100 mediante el modelo lineal y de áreas, en el formato circular y cuadrangular. Las tres bandas que representan las décimas y los cinco cuadraditos se han dispuesto en una tabla con columnas diferenciadas para las unidades, décimas y centésimas (casillero o franja de valor de posición).

Esta actividad comienza con una fracción decimal y se traduce a expresión decimal; también se debe proceder de manera inversa: Comenzar con una expresión decimal y traducirla a expresión fraccional, usando tanto el lenguaje escrito, oral y distintos modelos gráficos.

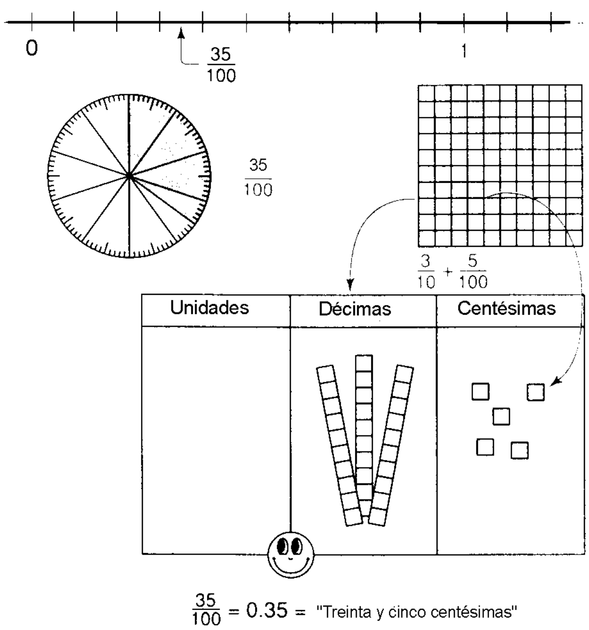


Fig. 3: Traducción entre expresiones fraccionales y decimales

[7] Van de Walle (2001).

3.3. Ordenación de decimales

La ordenación de decimales resulta difícil para los alumnos de primaria debido a las diferencias importantes entre el orden de los números racionales y los naturales. Por ejemplo, si pedimos que identifiquen el número mayor entre los siguientes: 0'36, 0'058, 0'375 y 0'4 , a alumnos de 12-13 años podemos encontrar que alrededor de la mitad de los alumnos dan respuestas erróneas. El error más frecuente suele ser elegir el número con mayor número de dígitos, siguiendo el criterio que se aplica con los números naturales.

Los siguientes tipos de situaciones pueden facilitar la discusión en clase sobre el tamaño relativo de los números decimales[8].

Situación 1:

Presentar dos números decimales. Pedir a los alumnos que digan cuál es el mayor y que expliquen su elección con ayuda de modelos gráficos o concretos (metro, tablero de 10 x 1)

Situación 2:

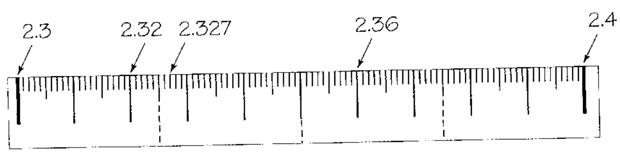
Escribir un número con cuatro dígitos decimales, por ejemplo, 3'0917.

- ¿Qué número está más próximo, el 3 o el 4?
- ¿Qué número está más próximo el 3'0 o 3'1?

Repetir las preguntas con las centésimas y las milésimas.

En cada respuesta, pedir que los alumnos justifiquen sus respuestas, ayudándose si lo creen necesario con modelos gráficos o concretos.

Un modelo de recta numérica grande sin numerar, pegada en la pizarra, puede ayudar en la validación de las respuestas.



Situación 3:

Preparar una lista de cuatro o cinco números decimales que los alumnos tengan dificultades en ordenar, de manera que estén entre dos números naturales consecutivos. Pedir que los ordenen de menor a mayor. A continuación pedir que los representen sobre la recta numérica con cien subdivisiones, como la mostrada en la figura anterior.
Como variante, pedir que sombreen cada decimal en una cuadrícula 10x10 usando estimaciones para las milésimas y diezmilésimas.

3.4. Operaciones aritméticas con decimales

El papel de la estimación

Se considera importante que los alumnos aprendan a realizar estimaciones del resultado de los cálculos con decimales antes de realizarlos aplicando las técnicas de papel y lápiz. Para muchos cálculos con decimales se puede encontrar estimaciones razonables simplemente redondeando los números hasta los enteros más próximos o a fracciones decimales sencillas. En casi todos los casos, un objetivo plausible puede ser

[8] Van de Walle (2001).

que los alumnos consigan encontrar de manera exacta la parte entera del resultado. Por supuesto que se deben proponer tareas de estimación con números relativamente sencillos.

Adición y sustracción de decimales

Se debe procurar seleccionar situaciones-problemas en las que tenga interés y sentido práctico la realización de las operaciones con cifras decimales. Por ejemplo,

Problema 1: Tenemos que colocar un rodapié en una habitación rectangular. Las dimensiones de la habitación son 3'90 m de largo y 2'65 m de ancho. ¿Cuántos metros de rodapié debemos comprar?

Problema 2: Dos amigos A y B cronometran el tiempo que tardan en correr un kilómetro. A dice que tarda 74'5 segundos. B es más preciso, y dice que tarda 81'34 segundos. ¿Cuántos segundos tarda B más que A?

Problema 3: Un carpintero debe hacer un soporte para un canalón de un tejado que tiene 2'9 m de largo. Dispone de cinco planchas de madera y debe elegir las que le convienen porque no quiere subirlas todas al tejado. Las planchas miden, respectivamente,

1 m 1'57 m 1'1 m 1'33 m 0'3 m

¿Qué planchas debería subir al tejado?

Se pedirá a los alumnos hacer previamente estimaciones de los resultados y después que apliquen sus propias técnicas de cálculos con papel y lápiz. Los alumnos decidirán qué método es mejor y por qué, llegando a la conclusión de que el método mejor es el que permita dar el resultado correcto lo más pronto posible. En general, el mejor método será operar como si fueran enteros, pero teniendo en cuenta la colocación de las unidades cuyo lugar se señala con la coma.

Multiplicación y división de decimales

Cualquiera de las situaciones de adición puede modificarse para que conduzca a una situación que da sentido a la multiplicación de un decimal por un entero. Por ejemplo[9], en el caso de las planchas de madera se puede suponer que el carpintero tiene tres tipos de planchas: 5 planchas de 0'58 m; 3 planchas de 1'44; 1 plancha de 0'95 m. Debe conseguir las sumas: 3'85; 2'32; 5'27; 6'37. El cálculo del área de rectángulos cuyos lados tienen medidas decimales es un tipo de situación que permiten atribuir significado al producto de dos decimales.

Las situaciones que permiten dar significado a la multiplicación se pueden utilizar también para atribuir significado a la división. Dividir se puede presentar siempre como encontrar el término desconocido de una multiplicación. Por ejemplo, dividir 6'4 entre 0'4 consiste en encontrar un número *d* (que en este caso es 16) tal que 6'4 = 0'4 x *d*.

En el contexto de cálculo de áreas de rectángulos, si fijamos un área y conocemos uno de los lados, la determinación del otro lado conduce a la división.

[9] Centeno (1988, p. 197).

En otras situaciones la división aparecerá como el resultado de una aplicación recíproca entre magnitudes. Por ejemplo[10], si 1 kg de naranjas produce 2/3 de litros de zumo, ¿cuántas naranjas producirán 6 litros de zumo?.

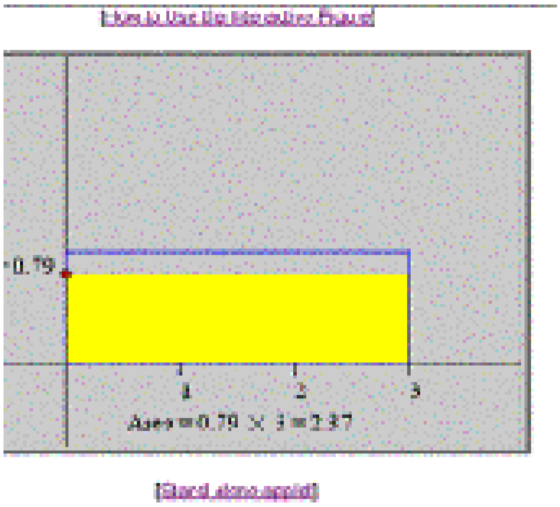
El aprendizaje de los algoritmos de papel y lápiz de la multiplicación y división de números decimales, dada la disponibilidad de calculadora, puede ser una pérdida de tiempo. Usando la calculadora los alumnos pueden descubrir para la multiplicación y división de números decimales la siguiente regla heurística:

> "Ignorar las comas decimales, y hacer el cálculo como si los números fueran enteros. Finalmente, colocar la coma decimal usando la estimación previa del resultado".

Remitimos al lector al capítulo 11 del libro de Centeno (1988) en el que se describe una amplia y cuidada selección de situaciones y recursos para la enseñanza de los decimales en primaria y primer ciclo de secundaria.

[10] Centeno, 1988, p. 205.

3.5. Recursos en Internet

Multiplicación por números mayores y menores que la unidad http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap6/6.1/index.htm#applet


Descripción

Se calcula la multiplicación del número 3 por un número decimal mayor o menor que la unidad. Los resultados se interpretan como el área de un rectángulo de base 3 y altura el multiplicador (y). Los valores de y se introducen de manera analógica desplazando verticalmente el punto correspondiente. El área del rectángulo de base 3 y altura unitaria se compara con el área de los sucesivos rectángulos de altura y.

Ejercicio 2:

1. ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que se suponen conocidos para usar este programa? ¿Qué conocimientos sobre el programa se deben aprender para usarlo como recurso didáctico?
2. ¿Cuáles son los nuevos conocimientos matemáticos pretendidos? ¿Cuál es su naturaleza? (adquisición de una destreza, reconocimiento de una propiedad y su justificación, etc.)
3. Describir un recurso didáctico alternativo para el estudio de los conocimientos pretendidos (p.e., uso de la calculadora, papel y lápiz, etc.). Indicar las ventajas relativas de cada recurso.
4. Diseñar una unidad didáctica para el estudio del contenido pretendido, apoyada en el uso de este recurso, indicando:
   - las consignas que se darán a los alumnos,
   - las explicaciones complementarias que se consideren necesarias sobre el uso del recurso y recuerdo de conocimientos previos,
   - uso de recursos complementarios,
   - posibles explicaciones finales para sistematizar los conocimientos pretendidos.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Respuestas de estudiantes a una prueba de evaluación

Las siguientes ocho cuestiones corresponden a una prueba realizada por una maestra para evaluar el conocimiento de sus alumnos acerca de los decimales. Resuelve las cuestiones de la prueba y responde a las diversas preguntas que se plantean sobre las respuestas de los alumnos.

Cuestión 1: Dar el número entero que sigue inmediatamente después del 54. Dar el número entero que sigue inmediatamente a 23'5. Dar el número decimal que sigue inmediatamente a a32'13.

Respuestas: Nicolás ha respondido: 55   24   32'14; Ruz ha respondido: 55   24   32'131; Florencio ha respondido: 53   23   32'12

1. Analiza los eventuales errores de estos niños.

Cuestión 2: Ordenar los números siguientes de menor a mayor:
23'4   23'37   23'127   17'15671   23'036   2'3401

Respuestas: En la tabla adjunta se dan las ordenadas hechas por seis niños. Analizar la lógica interna de estas ordenaciones:

María	*23'4*	*23'37*	*23'036*	*23'127*	*2'3401*	*17'15671*
Cristóbal	*23'4*	*23'37*	*23'127*	*23'036*	*17'15671*	*2'3401*
Manuel	*2'3401*	*17'15671*	*23'036*	*23'127*	*23'37*	*23'4*
Sebastián	*2'3401*	*1715671*	*23'4*	*23'37*	*23'036*	*23'127*
Julia	*2'3401*	*17'15671*	*23'4*	*23'036*	*23'37*	*23'127*
Tomás	*2'3401*	*17'15671*	*23'036*	*23'4*	*23'37*	*23'127*

2 ¿Qué finalidad puede tener el tratar de buscar "la lógica interna" de estas ordenaciones? ¿Qué puede hacer la maestra si no la encuentra?

Cuestión 3: Señalar la expresión que piensas que es falsa:
Entre 12'7 y 12'9:   no hay ningún decimal -hay un decimal -hay varios decimales.
Entre 14'6 y 14'7:   no hay ningún decimal -hay un decimal - hay varios decimales.

Respuestas: Joaquín piensa que hay un decimal entre 12'7 y 12'9, y ninguno entre 14'6 y 14'7. Pero Benito no está de acuerdo.

3. Trata de precisar la causa del error del niño que está equivocado.

Cuestión 4: Efectúa las siguientes operaciones: 3'7 + 5'8;   3'7 x 5'8
Respuesta: Alicia encuentra como solucion 8'15 y 15'56 para estas operaciones.

4. ¿Se puede relacionar su error con alguno otro de los encontrados anteriormente?

Cuestión 5: Efectúa la siguiente operación: 13'56 x 10
Respuesta: Vicente encuentra 13'560; Jerónimo encuentra 13'56.

5. ¿De dónde puede provenir sus errores?

Cuestión 6: ¿Es 23 un número decimal?
Respuesta: Cecilia es la única que piensa que sí.

6. ¿Qué harías en tu clase?

Cuestión 7: ¿Son decimales los números 1'234578 y 17'35353535... (35 repetido indefinidamente)
Respuestas: A David le gustaría encontrar la fracción que es igual a 17'353535... Dígale cuál es. José pienss que un número cuya escritura comporta una infinidad de cifras detrás de la coma no es un número decimal.

7 ¿Qué piensa de ésto? Muéstrale un ejemplo simple.¿Es el número 5'7899999 ..... (una infinidad de 9) un decimal? Justifícalo.

Cuestión 8: ¿Son decimales las fracciones: 1/4, 3/20, 7/8, 13/6, 243/6?

8 ¿Cómo se conoce que una fracción irreducible es decimal (sin hacer la división)? ¿En qué clase piensa que se ha propuesto este test? ¿Con qué finalidad? ¿Cómo debe explotar los resultados de este test la maestra?

4.2. Análisis de una experiencia de enseñanza

La observación sistemática y el análisis didáctico de experiencias de enseñanza es una actividad importante en la preparación de futuros maestros. A continuación incluímos la transcripción de una sesión de matemáticas en una escuela de primaria sobre la enseñanza de la suma de decimales[11]. Lee el texo y responde a las preguntas siguientes:

1. En la transcripcion se indica la hora y el tiempo que transcurre. ¿Puedes identificar de algún modo los diferentes momentos de la clase?
2. ¿Es importante la organización de la clase en grupos de dos alumnos?
3. El maestro emplea la palabra “situación” y no la palabra “problema” o “ejercicio”. ¿Hay alguna razón para ello?
4. Anuncia que no va a escribir el texto en la pizarra sino solamente “los números que serán útiles”. Pero de hecho también escribe las palabras “banco”, “planchas” ...¿Hay una diferencia de sentido entre “dos coma nueve metros” y “dos metros nueve”?
5. ¿Cuál es el papel que juegan las cuestiones planteadas por los alumnos después de la lectura del enunciado? ¿Son todas de la misma importancia?
6. La observación de un alumno anunciando que había encontrado el resultado, ¿es ignorada por el maestro? ¿Y por los otros alumnos?
7. ¿Cómo pueden saber los alumnos si sus hipótesis de trabajo son adecuadas?
8. ¿Cuál es la tarea de los alumnos?¿Encontrar las planchas que el carpintero debe emplear? ¿Explicar el método utilizado? ¿Qué es un “método” para un alumno?

[11] Este ejemplo de análisis didáctico de una experiencia de enseñanza ha sido seleccionado del excelente libro de Briand y Chevallier (1995).

9. ¿Cómo comprender la frase de Julien “No, no vale treinta y seis, es demasiado grande ...”?
10. ¿Qué habría escrito Élise después de 1,33 +0, si hubiera terminado su cálculo? ¿Cómo explicar su observación “Esto es falso”?
11. ¿Se pueden explicar los errores cometidos por Julien y Élise?
12. ¿Por qué ha elegido Cédric los dos números más grandes?
13. ¿Qué significa la observación de Cédric “hay que poner las comas en frente”?
14. ¿Qué pensar de la pregunta “Si la coma representa el metro, ¿qué representa las otras cifras?” ¿y de las explicaciones que siguen?
15. ¿Han comprendido los alumnos (en particular Julien y Élise) el método utilizado por Cédric?
16. ¿Cómo interviene aquí el hermano de Cédric?
17. ¿Es válida la hipótesis del maestro (que los alumnos van a utilizar sus conocimientos sobre las fracciones decimales)?
18. ¿Qué se puede pensar del contexto (y modo de presentación) del problema?
19. ¿Por qué se da el enunciado oralmente?

Transcripción de una sesión de matemáticas

La transcripción describe una sesión de 20 minutos en una clase de primaria así como las interacciones entre dos alumnos (Julien y Élise) durante dicha sesión.

9 h 30

Preparación de los alumnos

EL MAESTRO: Vais a trabajar en parejas. Voy a presentar una pequeña situación sobre la cual vais a trabajar, la debeis encontrar sobre la hoja. Os presento el texto, no lo voy a escribir en la pizarra. Escribo sólo los nombres que os van a ser útiles.
Un aficionado al bricolage quiere fabricar un banco con planchas de madera de dos coma nueve metros de largo.
Escribe en la pizarra: **un banco de 2,9 m de largo**.
Un banco de dos coma nueve metros de largo. ¿Sabe todo el mundo cómo se construye un banco?

LOS ALUMNOS: ¡No!

EL MAESTRO: Se cogen planchas y se ponen extremo con extremo. Para construir este banco, dispone de cinco tablas en un cobertizo pero no quiere ir a buscar y acarrear las tablas que no utilizará. Va a elegir las que convienen mejor para construir el banco. Os voy a dar las longitudes de las cinco planchas.
Escribe: **5 planchas: 1m; 1,57 m; 1,1 m; 1,33 m; 0,3 m.**
Vuestro trabajo será ayudar a este señor a encontrar las planchas que, puestas una a continuación de la otra dan la longitud de dos coma nueve metros.
Escribe en la pizarra: **2,9 m.**

UN ALUMNO: Pero, ¿se pueden tomar varias?

EL MAESTRO: ¿Piensas que se puede tomar sólo una? No, seguro, se pueden tomar varias. Por tanto, tenéis que encontrar cuáles son esas planchas y cuántas son necesarias.

OTRO ALUMNO: Pero, ¿hay varias de cada clase o una sola?

EL MAESTRO: Hay una sola plancha de cada longitud. Sólo hay cinco planchas.

El maestro señala las medidas escritas en la pizarra.

OTRO ALUMNO: ¿Se pueden cortar?

EL MAESTRO: No, no se pueden cortar. Utiliza las planchas tal y como están.

9 h 37

EL MISMO ALUMNO: ¡He encontrado el resultado!

EL MAESTRO: Bien, pero... Tenéis que trabajar por grupos, es necesario que cada grupo sea capaz de explicar cómo lo ha hecho. Ese es sobre todo vuestro trabajo. De acuerdo tú puedes ... si ya lo has encontrado, tanto mejor, pero debes ser capaz de explicarlo solo, mejor en grupo, uno de cada grupo debe ser capaz de explicar el método que ha utilizado para encontrarlo, trabajad en parejas.

9 h 38

El maestro supone que los niños van a utilizar espontáneamente sus conocimientos sobre las fracciones decimales:

$1{,}57 = 1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$

$1{,}33 = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100}$

por tanto, $1{,}57 + 1{,}33 = (1 + \frac{5}{10} + \frac{7}{10}) + (1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100})$

$1{,}57 + 1{,}33 = (1 + 1) + (\frac{5}{10} + \frac{3}{10}) + (\frac{7}{100} + \frac{3}{100})$

$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{10}{100}$

$1{,}57 + 1{,}33 = 2 + \frac{9}{10}$

1,57+1,33 =2,9

Entre ellos

ÉLISE: Vamos a probar un metro ... no, esto no va bien ... probemos con un metro y cero tres ...
Julian escribe en su cuaderno: **1 m + 0,3 = 1,3**

ÉLISE: No, esto no vale porque si tienes un metro más ... esto suma un metro tres ...
Élise escribe: **1,3 + 1,1 = 2,4**

JULIAN: Luego dos metro cuatro ...

ÉLISE: Para conseguir dos metros nueve ... espera ... si se toma un metro treita y tres mas un metro ... no, dos metros treinta y tres ... esto va bien.

9 h 43

EL MAESTRO: Hay varios métodos. Podeis encontrar varios métodos y ver si dan el mismo resultado por ejemplo.

9 h 44

Entre ellos

ÉLISE: Vamos a probar con un metro treinta y tres, no quiero decir uno coma treinta y tres, uno coma treinta y tres metros, eso vale ..

JULIAN: Menos ...

ÉLISE: ¡No se puede cortar!

JULIEN:¡Ah, si!

ÉLISE: Más ... ¿Qué es lo que podría ayudar?

JULIEN: Cero tres.

ÉLISE: Vamos a probar, porque después ...
Escribe: **1,33 + 0,**

JULIEN: Esto va a sumar treinta y tres, ¡eh!. Treinta y seis. No, no es treinta y seis, es demasiado grande porque ... ¡Ah no, un metro treinta y seis!

ÉLISE: Si esto suma un metro treinta y seis, es demasidado ... (*tacha*)

JULIEN: Es necesario llegar a dos metros nuevo ...

ÉLISE: ¡Ah! Esto ... Espera, espera un metro cincuenta y siete, un metro

JULIEN: Un metro cincuenta y siete más ...

ÉLISE: Cero tres, esto hace un metro sesenta ... ¡no!
Escribe: **1,57 +0,3 = 1,60**

JULIEN: ¿Cuánto has encontrado?

ÉLISE: No, esto es falso, no, no, no, esto es falso, es falso, no se puede ... un metro cincuenta y siete más cero tres esto hace un metro sesenta ...

JULIEN: Un metro cincuenta y siete más cero tres .. si tu haces ..

ÉLISE: No, no ... uno coma cincuenta y siete más cero coma tres igual a uno coma sesenta ....

9 h 45

EL MAESTRO: Vamos, ¿quien es capaz? ¡Dejad los bolígrafos!

JULIEN: ¡No hemos encontrado nada!

EL MAESTRO Ya se ha acabado la búsqueda y se van a escuchar las soluciones propuestas. ¿Qué tal? ¿Richard? ¿Se ha encontrado? ¿Paul-Éric? ¿Quién ha encontrado algo y quiere venir a explicarlo? Bien, ¿qué grupo comienza?¿Cedric? Vamos, ven a la pizarra, nos vas a explicar lo que has hecho, valiente, para todo el mundo.
Da una tiza a Cédric.

CÉDRIC: Bueno, yo no lo he encontrado al principio y enseguido, me he dicho que tomando los dos números más grandes, podría encontrar un resultado. Un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres, esto da dos metros noventa.

EL MAESTRO: ¿Cómo lo haces, un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres? ¿Es decir?

CÉDRIC: He hecho una suma.

EL MAESTRO: ¡Ah!, muestranos cómo has hecho la suma.

Cédric escribe sin comentario:

$$\begin{array}{r} 1{,}57 \\ +1{,}33 \\ \hline 2{,}90 \end{array}$$

EL MAESTRO: ¡Espera!
CÉDRIC: ¡Puedo quitar este cero y esto es dos metros nueve!
Tapa con la mano el 0:

ÉLISE: ¡Ah, sí! ¡Está bien!

EL MAESTRO: Bueno, ¿puedes explicar a los demás porqué has hecho una operación como esa? ¿Por qué has sumado este 7 con este 3? ¿este 5 con este 3? ¿este 1 con este 1?
Muestra las cifras en la pizarra.

CÉDRIC: Aquí, había una coma. Hay que poner las comas enfrente.
Muestra 1,57 en la operación planteada.

EL MAESTRO: ¡Ah! ¡Hay que poner! ¿Quién te ha dicho que hay que poner –¡chitón¡ - ¿es que se ha dicho eso en clase? ¡No! Chitón ...
CÉDRIC: La coma representa el metro.

Entre ellos	ÉLISE: ¡Sí, eso es! JULIEN: ¿Quién lo ha dicho? ÉLISE: ¡Sí!

EL MAESTRO: ¡Ah! Tú piensas que la coma, aquí, representa el metro por tanto, ¿qué es lo que has dicho a continuaicón? Si la coma representa el metro, ¿qué representan las otras cifras?

Entre ellos	JULIEN: ¡Los decímetros! ÉLISE: Los centrímeros! JULIEN: ¡De-cí-metros¡ ÉLISE: ¡De acuerdo!

CÉDRIC: Cinco los decímetros.

EL MAESTRO: Si, y ...

CÉDRIC: Siete centímetros.

EL MAESTRO: Si y debajo ...

CÉDRIC: Un metro, tres decímetros, ¡uh¡, tres decámetros, deci ...

EL MAESTRO: ¡Decímetros¡

CÉDRIC: Y tres centímetros.

EL MAESTRO. Y despues, ¿tú has sumado? ¿Qué has hecho después?

CÉDRIC: ¡He sumado¡

EL MAESTRO: Los ...

CÉDRIC: Un metro cincuenta y siete y un metro treinta y tres, esto me ha dado dos metros noventa.

EL MAESTRO: Bueno, ¿ha entendido todo el mundo el método usado por Cédric?

ÉLISE y JULIEN: ¡Sí, sí!

LOS ALUMNOS: Sí ...

EL MAESTRO: Paul-Éric nos dice que esto es lo más fácil. No forzosamente. Dime, Cédric, quién te lo ha enseñado. ¿Lo sabías de antes o por el contrario lo has encontrado enseguida?

CÉDRIC: Ha sido mi hermano quien me lo había enseñado.

EL MAESTRO: ¿Quiénes son los que ya saben hacer esto?
Se levantan una docena de dedos.

¿Quién no lo sabe? ¿Quién no ha hecho esto nunca con las comas? Nunca se ha hecho una suma con comas en clase? ... ¿Quién no lo ha hecho nunca antes?
Algunos dedos no se levantan, los niños se miran.

9h 50 (fin de la observación)

BIBLIOGRAFÍA

Briand, J. y Chevalier, M-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*. Paris: Hatier.

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è^re^ année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Castro, E. (2001). Números decimales. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (p.315-343). Madrid: Síntesis.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. Madrid: Síntesis.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (5º y 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 1. Paris: Editions Marketing (Ellipses).

Socas, M. (2001). Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 297-318). Universidad de la Laguna.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

II.

DIDÁCTICA DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS PARA MAESTROS

Capítulo 6:

NÚMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El Diseño Curricular Base del MEC para el área de Matemáticas en Primaria hace referencia a los números con signo en el bloque temático sobre *Números y operaciones*, aunque sólo en el apartado de *Hechos, conceptos y principios*. Concretamente, los números enteros figuran como una clase de números, junto con los naturales y racionales (que designa como fraccionarios y decimales). También se mencionan explícitamente los números positivos y negativos dentro del punto dedicado a sistemas de numeración.

Hechos, conceptos y principios
1. Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales.
(…)
2. Sistemas de numeración: decimal, romano, monetario, para medir ángulos, para medir el tiempo.
(…)
• Números positivos y negativos. Números cardinales y ordinales.

En el Real Decreto por el que se establece el currículo de Educación Primaria del MEC se suprime la referencia a los números enteros, pero se continúa haciendo mención de los números positivos y negativos en el bloque de *Números y operaciones*.

Por otro lado, los Principios y Estándares 2000 del NCTM incluyen en el bloque de *Números y operaciones*, para los grados 3 a 5 el siguiente objetivo (expectativa): "explorar números menores que 0 extendiendo la recta numérica mediante aplicaciones familiares".

Para los grados 6 a 8 se amplia con la siguiente mención: "desarrollar el significado de los enteros y representar y comparar cantidades con ellos". Los enteros quedan incorporados en estos niveles como una nueva clase de números que deben dominarse progresivamente, tanto en la comprensión del significado de las operaciones como el cálculo con ellos.

Aparte de estas referencias curriculares que, en cierta medida, son una justificación para incluir su estudio en el programa de formación de maestros, podemos aducir la importancia social y cultural de los contextos de usos de los números positivos y negativos, pues se utilizan cada vez con más frecuencia en situaciones cotidianas, lo que fuerza a los niños a familiarizarse con algunos de sus aspectos.

Ejercicio

1.Analizar las diferencias y semejanzas en las orientaciones curriculares siguientes respecto del estudio de los números naturales y la numeración,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE

2.1 Dificultades para "dar sentido" a los números positivos y negativos y sus operaciones

Las dificultades de los alumnos para comprender y manipular correctamente los números positivos y negativos son, en cierta medida, un reflejo de las que históricamente tuvo la comunidad matemática para aceptarlos como números. Asumir los números con signo exige romper la visión tradicional de los números como nociones que expresan el resultado de la medida de una cantidad de magnitud absoluta. En ese contexto, el cero indica la ausencia de cantidad de magnitud, por lo que no puede haber números menores que cero; la suma se asocia con acciones de añadir o reunir, por lo que el resultado tiene que ser mayor o, a lo sumo, igual que los sumandos; la resta se asocia con acciones de separar o quitar, por lo que el resultado tiene que ser menor o, a lo sumo, igual que el minuendo; si en una resta el minuendo es menor que el sustraendo, la operación es imposible porque no se puede quitar más de lo que se tiene; si dos fracciones tienen el mismo denominador, es menor la que tiene menor numerador porque éste indica las partes alícuotas de la unidad que se toman, etc. Todas estas afirmaciones son consustanciales al concepto de número y tienen una influencia decisiva en su construcción.

Sin embargo, aceptar la existencia de los números con signo supone asumir que los números y sus operaciones ya no tienen, en general, las propiedades antedichas. Hay que entender que los números no siempre expresan medidas de cantidades de magnitudes absolutas, que existen números menores que cero ($-3<0$), que cero no siempre indica ausencia de cantidad de magnitud, que sumar no siempre significa aumentar ($(+3)+(-2)=+1$), que restar no siempre significa disminuir ($(+3)-(-2)=+5$), que a un número se le puede restar otro número mayor ($6-8=-2$), que en fracciones del mismo denominador no siempre es menor la que tiene menor numerador ($5/-2<3/-2$), etc. Todo esto exige una reestructuración del concepto de número. No se trata de añadir más información a la que ya se posee, sino de modificar sustancialmente nuestro concepto de número, de elaborarlo de nuevo, asumiendo que muchas propiedades fundamentales, que creíamos ciertas para todos los números, ahora ya no lo son[1]. Y las prácticas habituales de enseñanza de los números enteros no contribuyen a poner de manifiesto la necesidad de esta reelaboración.

La escuela tiende a presentar los números enteros en un contexto aritmético, ligados a medidas de cantidades de magnitud y acciones físicas ejercidas sobre dichas cantidades. Es decir, utiliza una introducción de los números enteros por medio de modelos concretos (deudas y haberes, temperaturas, movimientos y posiciones a derecha e izquierda de un origen, etc), a imagen y semejanza de las introducciones de los números naturales y fraccionarios. Pero esto agrava las dificultades para aceptar que los nuevos números exigen una reestructuración completa del concepto de número y contribuye a crear en el alumno la falsa idea de que los razonamientos que servían para los números naturales siguen sirviendo para los números enteros.

Y así, bastantes niños deciden que $–7>-3$ porque "una deuda de 7 euros es mayor que una de 3 euros" o porque "a 7 grados bajo cero hace más frío que a 3 grados bajo cero" o porque "si recorremos la recta numérica desde el cero, primero nos encontramos el punto $–3$ y después el punto $–7$"; o deciden que $(+7)-(-2) = +7$ porque "si tengo 7 euros y me perdonan una deuda de 2 euros, sigo teniendo 7 euros"; o consideran que $(-6)-(-2) = 4$ porque "la diferencia entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero es de 4 grados"; o no pueden entender que $(-3)(-4)$ sea igual a $+12$ porque "si se multiplica una

[1] En realidad, este proceso se inicia con la introducción de los números racionales, pues multiplicar por un número menor que la unidad supone disminuir el multiplicando, y dividir por él, aumentar el dividendo, lo cual es impensable en el ámbito de los números naturales. De ahí, los errores habituales de los niños cuando, por ejemplo, dicen que $0{,}3\cdot 0{,}2$ es 0,6 (en vez de decir 0,06) o que 6:0,2 es 3 ó 0,3 (en vez de 30).

deuda por otra deuda, no puede dar un haber"; o, ante la pregunta de si pueden encontrar un número que sumado a 8 dé 3, responden que eso no es posible porque "si tengo 8 objetos y añado algunos más, no me pueden quedar 3"; etc.

2.2 Dificultades de manipulación de los signos + y – en las expresiones algebraicas

Otro orden de dificultades aparece en la manipulación de los signos + y - en las expresiones algebraicas, tanto numéricas como literales. Ya no son dificultades ligadas al "sentido" o la "significación" de los números con signo, sino a las reglas formales de escritura y cálculo. Y también aquí se observa una relación directa entre las prácticas habituales de enseñanza y los errores de los alumnos. Una de ellas es la interpretación que hacen muchos libros de texto de los signos + y - como signos operativos binarios, lo que fuerza a seguir interpretando las expresiones algebraicas numéricas en términos de sumas y restas entre números sin signo, con lo que todas las ventajas que supone el cálculo con números con signo se pierden.

Por ejemplo, si en la expresión 7+5-8-3-4+2 consideramos los signos como signos operativos binarios, nos encontramos con una sucesión de sumas y restas que afectan a números naturales. En estas condiciones, los alumnos tienden a operar de izquierda a derecha, a medida que leen, lo que en este caso daría lugar a un cálculo correcto, o a asociar los números de dos en dos, dando por supuesto que la propiedad asociativa se cumple también para la resta. En este segundo caso se producen errores del tipo 7+5-8-3-4+2 = (7+5)-(8-3)-(4+2) = 12-5-6 = 1.

Si en vez de esto, interpretamos que los signos de la expresión 7+5-8-3-4+2 son predicativos, estaremos ante una suma entre números con signo lo que nos permite asociarlos y conmutarlos como nos parezca oportuno. El intento de la escuela de reducir los cálculos con números enteros a cálculos con números naturales desvirtúa las condiciones de necesidad que están en la génesis de estos números. Precisamente, lo cómodo, lo que permite un cálculo ágil, es transformar las sumas y restas de naturales en sumas de enteros y no al revés.

Para evitar que los alumnos asocien de manera inconveniente los términos de una expresión algebraica numérica en la que solo intervienen sumas o restas, sin renunciar a convertir las sumas de números con signo en sumas y restas de números sin signo, muchos profesores imponen la norma de que se deben sumar, por un lado, todos los números precedidos del signo + y, por otro, todos los precedidos del signo -, para terminar efectuando la operación pertinente entre los dos términos resultantes. Esta regla garantiza la corrección del resultado, pero estereotipa enormemente los cálculos y no permite simplificaciones. Por ejemplo, en la expresión 177+53-84-53+4+80-2 sumar negativos con negativos y positivos con positivos supone hacer varias operaciones innecesarias.

También conduce a errores la tendencia de los alumnos a interpretar como signo predicativo lo que, en ocasiones, debe entenderse como signo operativo unario. De ahí que, ante una expresión como -x, digan que representa un número negativo, en vez de decir que representa el opuesto de x (y que -x será negativo si x es positivo y positivo si x es negativo).

Por último, queda por reseñar un fenómeno que afecta también a las reglas formales de cálculo. La regla de los signos para la multiplicación y división es de fácil recuerdo mientras que las reglas formales de suma y resta de números con signo tienen un enunciado más complejo. Esto da lugar a que algunos niños terminen aplicando la regla de los signos al caso de sumas y restas y decidan, por ejemplo, que (+7)-(-2) = -5 porque "siete menos dos es cinco y más por menos es menos".

3. SITUACIONES Y RECURSOS

A la hora de plantearnos la introducción de los números positivos y negativos, tenemos que tener en cuenta que donde verdaderamente se estudian es en la Educación Secundaria, mientras que en la Educación Primaria apenas hay alguna referencia a estos números. En esta etapa, se trata sobre todo de desarrollar aquellas actividades aritméticas con números naturales o fraccionarios que posteriormente puedan facilitar la introducción de los números con signo. Comentaremos también alguna actividad introductoria de la suma de dichos números.

3.1. Situaciones con números naturales que anticipan los números enteros

Son situaciones aditivas que se resuelven perfectamente en el ámbito de los números naturales pero que, al intervenir en ellas transformaciones, movimientos o comparaciones, exigen el añadido de ciertas especificaciones (de aumento o disminución en las transformaciones, de más o de menos en las comparaciones o de derecha o izquierda en los movimientos) cuyo tratamiento anticipa la estructura aditiva de los números enteros.

Situación 1: Adivina el número[2]

Un alumno anota en secreto un número inferior o igual al número total de alumnos de la clase. A continuación, cada uno de los demás compañeros, propone un número con la intención de adivinarlo. Una vez descubierto el número, cada alumno indicará si acertó o no, y en caso negativo si se pasó o no llegó y en cuanto.

Situación 2: Alturas[3]

1. Anotar las estaturas de todos los compañeros. Tomar la altura del más alto como el origen y situar todas las otras ordenadamente en una recta graduada.
2. En el lugar correspondiente a la estatura de cada compañero escribir la diferencia de estatura respecto al más alto
3. Repetir lo mismo tomando como origen:
   a) La estatura del más bajo.
   b) La del que se encuentra en la mitad
   c) La de cualquier compañero que no se encuentre en ninguno de los tres casos anteriores.

Situación 3: Juego de dados[4]

Por parejas se utilizan dos dados de colores diferentes y un papel donde se dibuja la semirrecta natural. Partiendo de un punto suficientemente elevado, cada jugador tira los dos dados por turno, resta los dos números y avanza o retrocede, dependiendo del color del número mayor, tantos lugares como indica el resultado. Llega un momento en que pueden aparecer resultados que "se salen" de la semirrecta, lo que se aprovecha para discutir la necesidad de ampliación, dar nombres a los puntos por debajo de cero (por ejemplo, añadiendo al número una i para indicar que está a la izquierda del cero) y seguir jugando con ellos. Gana el jugador que consigue sobrepasar un cierto número

[2] González y cols (1990, p. 177)
[3] Colectivo Periódica Pura (1982, p. 43)
[4] Gonzalez y cols (1990, p. 281)

fijado de antemano.

Situación 4: Los chinos[5]

Juego para dos jugadores. Se utiliza como material seis fichas bicolores (por ejemplo, amarilla y roja).

Desarrollo:

El orden de juego es alternante. Es necesario decidir quién comienza.

Cada jugador toma dos o tres fichas a la vista del contrario (dejando las otras sobre la mesa). En secreto las pone sobre la palma, de la cara amarilla o de la roja.

Cada uno hace una apuesta sobre el total. Se destapan las dos cantidades y se hace la "suma" neutralizando todos los pares bicolores.

Si alguno de los jugadores ha acertado el total, gana un punto.

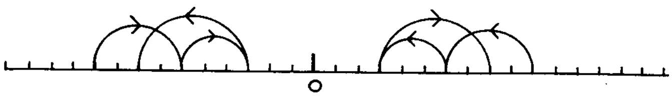
Gana el juego el que después del tiempo fijado ha reunido más puntos.

Se pueden plantear las siguientes preguntas:

a) Si un jugador coge dos fichas, ¿cuáles son las posibles jugadas?
b) ¿Y si coge tres fichas?
c) ¿Cuáles son los posibles resultados globales si los jugadores cogen dos fichas cada uno?
d) ¿Y si cogen tres fichas cada uno?
e) ¿Y si uno coge tres y el otro dos?
f) ¿Hay alguna estrategia que facilite o asegure la victoria?

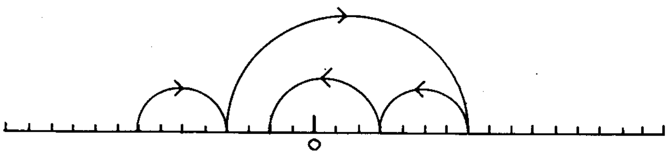
Situación 5: Simetría en Z

Dos canguros juguetones saltan sobre la abscisa jugando a "imitar al rey", pero al contrario:



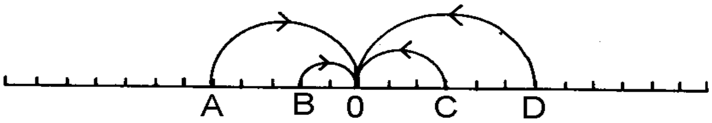
Parten de lugares simétricos y cada movimiento que un canguro hace hacia un lado, el otro lo hace hacia el lado contrario. Dos niños, con tizas de dos colores, pueden jugar en la pizarra.

1. Juega con un compañero: Colocad las puntas de vuestros lápices en dos puntos simétricos. El que comienza hace un salto y el otro jugador hace el salto contrario; a continuación el segundo jugador comienza de nuevo y el primero es el que responde.
2. Dibuja la jugada "simétrica" de esta figura (poniendo números a las posiciones y a los saltos):



3. Observa el gráfico y completa la tabla adjunta:

[5] Periódica Pura (1982, p. 141)



Punto inicial	Desplazamiento	Punto final
A =		
B=		
C=		
D=		

Ejercicio

2. Para cada una de las situaciones descritas en esta sección:
   a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
   b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
   c) Identificar las variables didácticas
   d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
   e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
   f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.
   g) Identificar las limitaciones de las situaciones cuando se proponen como modelos de la estructura algebraica de los números enteros.

3.2 Situación introductoria de la estructura aditiva de los números enteros

Dado que la justificación de los números enteros viene dada por el cálculo algebraico, las situaciones introductorias deben ser situaciones aritméticas que exijan una resolución de tipo algebraico. Pero no entendemos por tal una resolución en términos de ecuaciones, pues ésta es compleja de desarrollar si no se manejan los números con signo; lo que proponemos es cambiar el objetivo de la resolución de problemas: ya no se trataría de buscar el número que soluciona el problema, sino la fórmula que lo soluciona[6]. Y para que esa actividad de búsqueda de fórmulas tenga sentido, es necesario que alguna de las cantidades que intervienen en el problema sea una variable a fijar en un momento posterior. Por ejemplo, el enunciado:

> *En un tren viajan cierto número de personas. En la primera estación suben 13 viajeros y bajan 25, en la segunda estación suben 15 y bajan 43 y en la tercera estación suben 32 y bajan 17. Encuentra una fórmula que nos diga cuántos viajeros quedan en el tren después de abandonar la tercera estación.*

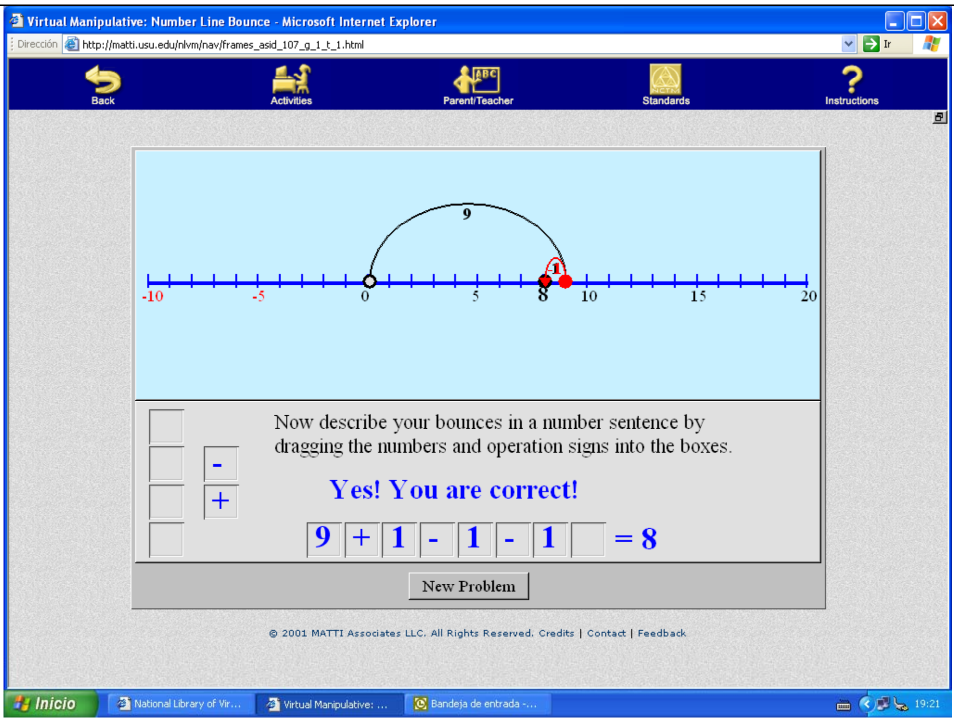
exige nombrar el número de viajeros iniciales, v, y el número de viajeros finales, w, para establecer la fórmula w = v+13-25+15-43+32-17. La simplificación de esta fórmula en w = v-25 obliga a razonar en términos de sumandos y sustraendos y familiariza a los alumnos con la idea de manipular números precedidos de un signo + ó -. Tanto la búsqueda de fórmulas de resolución de problemas aritméticos como la transformación de esas fórmulas en expresiones más simples exige la consideración de las operaciones, no ya entre números, sino entre sumandos y sustraendos, lo que, en la práctica, significa poner de manifiesto la estructura aditiva de los números enteros.

[6] Los alumnos de tercer ciclo de Primaria están familiarizados con la noción de ‘fórmula’ desde el momento que conocen las fórmulas de las áreas de las figuras geométricas. Se trataría de generalizar esa idea y hablar de la “fórmula de resolución” de determinados problemas.

3.3. Recursos en Internet

Modelos de sumas y rectas en la recta numérica

http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_107_g_1_t_1.html



Descripción:

Este recurso permite expresar las operaciones de suma y resta, tanto usando el lenguaje matemático, como mediante desplazamientos en la recta numérica.

Permite la manipulación y visualización individualizada de las operaciones.

Hay diferentes niveles de dificultad. Se usan números positivos y negativos.

Ejercicio 3:

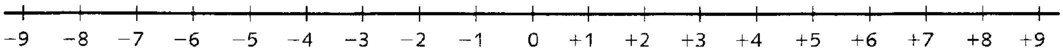
1. Explorar las diferentes opciones del programa.
2. Indicar los niveles y partes del currículo de primaria en que se pueden usar las distintas opciones.
3. Identificar las variables didácticas de las diversas tareas propuestas en el programa y los valores particulares de dichas variables implementados. ¿Existe algún tipo de control de los valores por parte del usuario?
4. Comparar los tipos de actividades que se pueden realizar usando el programa respecto a las que se hacen habitualmente con papel y lápiz. ¿Se pueden hacer actividades que no se puedan realizar sin este recurso?
5. ¿Cómo cambian las técnicas de solución?
6. Después que los alumnos han explorado el programa y realizado las actividades, ¿Qué tipo de explicaciones podría dar el profesor para sistematizar los conocimientos puestos en juego?

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de textos escolares

1. En un libro de primaria encontramos la siguiente actividad:

Observa la recta entera y calcula.



- (+3) + (-2) = ... • (-2) + (-4) = ...
- (+8) + (-5) = ... • (-4) + (-3) = ...
- (+7) + (-8) = ... • (-5) + (-4) = ...

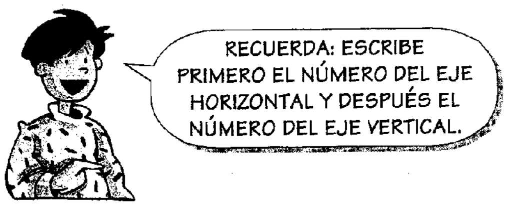
a) Enuncia seis situaciones referidas a contextos cotidianos (temperaturas, niveles de altitudes, etc.) cuya resolución implique la realización de los cálculos pedidos.

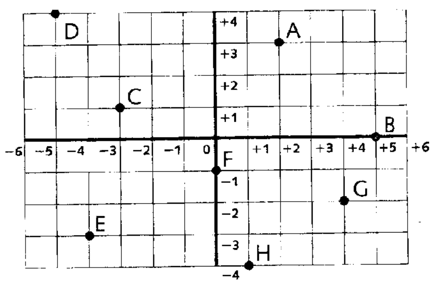
b) En el libro de texto encontramos la siguiente regla:
"Para sumar a un número entero un número entero positivo, se avanza a la derecha, en la recta entera, a partir del primer número tantas unidades como indica el segundo".

¿Qué tipo de experiencias pueden ayudar a que los niños "reinventen" por sí mismos esta regla?

2. En un libro de primaria encontramos la siguiente actividad:

1. Observa y escribe las coordenadas de cada punto.





A → (+2, ...) C → (..., ...) E → (..., ...) G → (..., ...)
B → (..., ...) D → (..., ...) F → (..., ...) H → (..., ...)

2. Representa en la cuadrícula anterior los siguientes puntos.

• J → (+4, +1) • K → (+1, -3)	• L → (-1, +3) • M → (+3, -2)	• N → (+5, +3) • Ñ → (-4, -1)	• → (-4, +3) • P → (-5, -3)

a) ¿Crees que la información sobre el orden de escritura de los componentes del par de números que representan cada punto es suficiente para realizar la actividad? Completa el enunciado de las reglas de representación cartesiana de puntos del plano.
b) Inventa un juego que permita contextualizar la tarea pedida (por ejemplo, referido a la búsqueda de un tesoro).

4.2. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "Números enteros" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado en la parte A: Contextualización profesional de este capítulo.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema que consideres potencialmente conflictivos para los alumnos de dichos niveles.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

Bibliografía

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, ICE de la Universidad de Zaragoza. También puede encontrarse en Internet: http://www.unizar.es/galdeano/preprints/pre01.html

Colectivo Periódica Pura (1982). *Didáctica de los números enteros*. Madrid: Nuestra Cultural.

Ferrero, L. y cols (1999). *Matemáticas (3º a 6ª Primaria)*. Madrid: Anaya.

González, J. L. (2001). Relatividad aditiva y números enteros. En Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 257-283). Madrid: Síntesis.

González, J. L. y cols (1990). *Números enteros*. Madrid: Síntesis.

Rodríguez, M., Siles, I. y González, J. (1999). *Matemáticas 6º*. Madrid: Santillana.

III.

PROPORCIONALIDAD Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Carmen Batanero

Índice

Página

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

La proporcionalidad se contempla en diferentes bloques temáticos, en la forma siguiente:

En el bloque 1 (Números y operaciones) se indica que *"El tanto por ciento se pretende abordar solamente de forma intuitiva."*

- Entre los hechos, conceptos y principios sobre los números naturales, enteros, fraccionales y decimales se menciona: *El tanto por ciento de una cantidad (%).*
- A propósito de la multiplicación y división se hace referencia explícita a la proporcionalidad: *"la multiplicación como suma abreviada, proporcionalidad (doble, triple, etc.); la división como reparto, proporcionalidad (la mitad, la tercera parte, etc.)."*

También entre los procedimientos de este bloque se incluyen los siguientes relacionados con el tema:

- (7) Interpretación, cálculo y comparación de tantos por ciento.
- (8) Formulación y comprobación de conjeturas sobre la regla que sigue una serie o clasificación de números y construcción de series y clasificaciones de acuerdo con una regla establecida.
- (16). Elaboración de estrategias personales de cálculo mental
- Porcentajes sencillos

En el bloque 3 (Orientación y representación en el espacio), encontramos:

- En el apartado de Hechos, conceptos y principios, se concede un lugar destacado a la representación elemental del espacio mediante:
  - Planos, mapas, maquetas.
  - Escalas: doble, mitad, triple, tercio, etc.
  - Escalas gráficas

- Entre los Procedimientos,
- (5). Lectura, interpretación y construcción a escala de planos y maquetas.
- (6). Lectura, interpretación y reproducción a escala de mapas.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En los grados 3-5 se menciona el tema en la forma siguiente:

- Comprensión numérica: reconocer y generar formas equivalentes de formas comunes en que se representan las fracciones, decimales y porcentajes.
- Los estudiantes deben comprender el significado de un porcentaje como parte de un total y usar porcentajes comunes como 10 o 50 por ciento. Al estudiar las fracciones decimales y porcentajes conjuntamente pueden aprender a pasar de una a otra forma equivalente.

Asimismo, en conexión con la estadística se sugiere que *los alumnos representen datos en gráficos de líneas y barras,* en cuya construcción aparece implícitamente la proporcionalidad.

En los grados 6-8 se menciona:

- Trabajar con flexibilidad con fracciones decimales y porcentajes para resolver problemas.
- Comprender porcentajes mayores que 100 y menores que 1
- Comprender y usar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

El razonamiento proporcional se considera como uno de los componentes importante del pensamiento formal adquirido en la adolescencia. Las nociones de comparación y covariación están en la base subyacente al razonamiento proporcional, siendo a su vez los soportes conceptuales de la razón y la proporción. El desarrollo deficiente de estas estructuras conceptuales en los primeros niveles de la adolescencia obstaculiza la comprensión y el pensamiento cuantitativo en una variedad de disciplina que van desde el álgebra, la geometría y algunos aspectos de la biología, la física y la química.

Diversas investigaciones han mostrado, sin embargo, que la adquisición de las destrezas de razonamiento proporcional es insatisfactoria en la población en general. Estas destrezas se desarrollan mas lentamente de lo que se había supuesto; incluso hay evidencias de que una gran parte de las personas nunca las adquieren en absoluto. Estas cuestiones no se enseñan bien en las escuelas, que con frecuencia sólo estimulan la manipulación de símbolos y fórmulas carentes de significado[1].

2.1. Desarrollo del razonamiento proporcional

El esquema de proporción es considerado por Piaget como un componentes básico del razonamiento formal, que será necesario, entre otros, para adquirir conceptos como el de probabilidad y correlación. Sin embargo, esto no quiere decir que los niños no tengan una percepción progresiva de las proporciones. El desarrollo de esta idea, también sigue las etapas típicas de la teoría de Piaget, quien estudió cómo los niños la usan cuando tienen que estimar la probabilidad de un suceso.

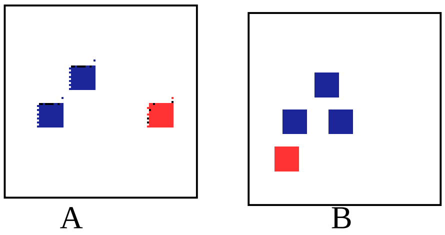
[1] Hoffer (1988), o.c.

Una tarea típica es la siguiente:

Tarea 1. En la caja A se han metido 2 fichas azules y 1 ficha roja. En la caja B se han metido 3 fichas azules y 1 ficha roja. (Mira el dibujo)

Con los ojos vendados tienes que sacar una ficha roja para ganar un premio (primero movemos bien la caja para que las fichas se mezclen). ¿Cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha roja
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha roja
(C) Las dos cajas dan la misma posiblidad
(D) No lo se



La comparación de probabilidades implica una comparación de fracciones, pero se añade la dificultad de que también se requieren las ideas de azar, casos favorables y posibles. Los autores que han trabajado el tema sugieren que una tarea de comparación de probabilidades es siempre más difícil que otra tarea de comparación de fracciones en un contexto determinista.

Un ejemplo típico de tarea proporcional en contexto determinista es la siguiente:

Tarea 2. Mi madre ha preparado dos jarras de limonada. En la jarra A ha mezclado dos vasos de agua y un vaso de zumo de limón. En la jarra B ha mezclado tres vasos de agua y uno de zumo de limón. ¿En cual de las dos jarras el sabor a limón es más intenso?

Ejercicios:

1. ¿Crees que puedes variar la dificultad de la tarea 1 para los niños, cambiando el número de bolas rojas y azules en cada caja? Pon un ejemplo de forma que la tarea sea más sencilla. Pon otro ejemplo de modo que la tarea sea más difícil.

2. ¿En qué se parecen las tareas 1 y 2? ¿En qué se diferencian? ¿Puedes cambiar el número de vasos de agua y limón en las jarras para que la tarea resulte más fácil o más difícil a los niños? ¿Qué tipos de razonamientos seguirán los niños para resolver la tarea?

En estas tareas hay cuatro datos, dos pares de datos para cada una de las jarras o cajas que queremos comparar:

a = número de vasos de limón en la Jarra A en la tarea 2 (o número de casos favorables en la urna A en la tarea 1).
b = número de vasos de agua en la Jarra A en la tarea 2 (o número de casos desfavorables en la urna A en la tarea 1).
c = número de vasos de limón en la Jarra B en la tarea 2 (o número de casos favorables en la urna B en la tarea 1).
d = número de vasos de agua en la Jarra B en la tarea 2 (o número de casos desfavorables en la urna B en la tarea 1).

La dificultad de estas tareas dependen de los valores relativos de estos cuatro datos. En la tabla 1 describimos algunas etapas que pasan los niños para resolver tareas como la 1 y 2 hasta llegar a alcanzar el razonamiento proporcional del adulto (tarea 2)[2]

Etapa	Nombre	Edad media (años,meses)	Ejemplo (a, b) vs (c, d)	Capacidad requerida	Estrategia /razonamiento
0	Simbólica	2, 0	(1,0) vs (0, 3)	Distinguir el agua del zumo de limón	Buscar la jarra que sólo tiene zumo
IA	Intuitiva Inferior	3; 6	(1, 4)vs (2, 4)	Comparar el primer elemento del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de agua. Una tiene más zumo de limón Luego tiene el sabor más intenso
IB	Intuitiva media	6; 4	(1, 2) vs(1, 4)	Compara el segundo término del par	Las dos jarras tienen igual cantidad de limón. Una tiene más agua Luego tiene el sabor menos intenso
IC	Intuitiva superior	7; 0	(5,2) vs (3,4)	Observa la relación de orden inversa entre los términos de los dos pares	En la jarra A hay más zumo que agua En la jarra B hay más agua que zumo Luego A tiene el sabor más intenso
IIA	concreta inferior	8;1	(1,1) vs (3,3)	igualdad de términos en cada par	En la jarra A hay igual de agua que zumo En la jarra B también hay igual de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIB	Concreta superior	10; 5	(4, 2) vs (6,3)	La misma proporción entre los términos de ambos pares	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay doble cantidad de agua que zumo Luego el sabor es igual
IIIA	Formal inferior	12; 2	(2,1) vs (4, 3)	En alguno de los pares los términos son múltiplos	En la jarra A hay doble cantidad de agua que zumo En la jarra B hay menos del doble de agua que zumo Luego el sabor de A es más fuerte
IIIB	Formal superior	15; 10	(3, 5)vs (5,8)	Comparar fracciones con distinto denominador	En la jarra A, de 8 vasos de líquido 3 son de limón En la jarra B, de 13 vasos de líquido 5 son de limón 3/8 =39/104 5/13=40/104 Luego en B el sabor es más intenso porque de las mismas partes totales (104) hay una más de limón.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento proporcional. Algunas de estas orientaciones son las siguientes[3]:

1. Proporcionar una amplia variedad de tareas sobre razones y proporciones en diversos contextos que pongan en juego relaciones multiplicativas entre distintas magnitudes.

[2] Noelting (1980).
[3] Van de Walle (2001).

2. Estimular la discusión y experimentación en la comparación y predicción de razones. Procurar que los niños distingan las situaciones de comparación multiplicativa (proporcionalidad) de las no multiplicativas, proporcionando ejemplos y discutiendo las diferencias entre ellas.
3. Ayudar a los niños a relacionar el razonamiento proporcional con otros procesos matemáticos. El concepto de fracción unitaria es muy similar al de tasa unitaria. El uso de tasas unitarias para comparar razones y resolver proporciones es una de las técnicas más apropiadas.
4. Reconocer que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo de "regla de tres" para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional y no se deberían introducir hasta que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.

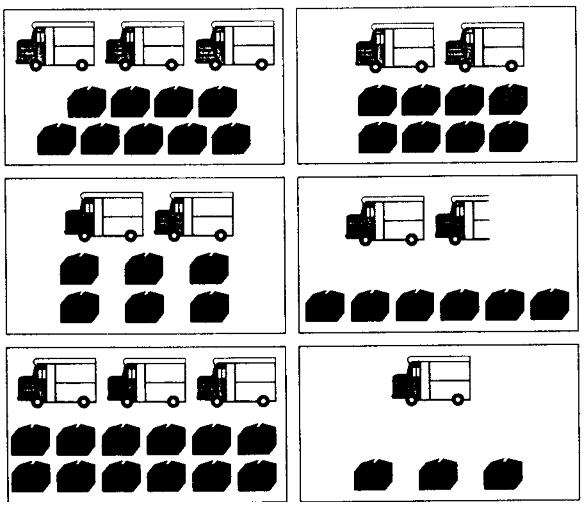
En las siguientes secciones describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la proporcionalidad en primaria.

3.1. Selección de razones equivalentes

En este tipo de actividades se presenta una razón entre cantidades de objetos o medidas y los alumnos deben seleccionar una razón equivalente entre otras dadas. El centro de atención será el apoyo intuitivo de por qué los pares seleccionados tienen la misma razón. En estas actividades es de gran utilidad incluir pares de razones que no sean proporcionales pero que tengan una diferencia común. Por ejemplo, 5/8 y 9/12 no son razones equivalentes, pero la diferencia entre los numeradores y los denominadores es la misma. La situación fuerza a los alumnos a pensar en términos multiplicativos y no aditivos.

Actividad 1:

Preparar fichas en las que se muestren objetos diferentes en diversas cantidades, como se muestra en la figuras (cajas y camiones). ¿Hay algunas fichas en que la razón entre las cajas y los camiones sea la misma? Dada una ficha, los alumnos deben seleccionar otra ficha que tenga la misma razón entre el número de objetos.



Esta tarea lleva a los alumnos a realizar una comparación numérica multiplicativa y no visual, e introduce la noción de razón como tasa (comparación de cantidades de magnitudes diferentes). Una tasa unitaria corresponde al caso en que una ficha tiene un solo objeto de una clase (por ejemplo, 1 camión y tres cajas).
Objetos emparejados con monedas o billetes sería una manera de introducir el precio como una razón.
En el contexto de probabilidad se pueden presentar diferentes cajas con fichas de dos colores y analizar cuáles dan la misma probabilidad de obtener una bola de determinado color.

3.2. Progresiones crecientes y decrecientes de cantidades

Un tipo de actividad que se puede proponer a los alumnos para introducir las series proporcionales puede ser la continuación de series de cantidades que se corresponden según un factor de escala y que se refieren a situaciones familiares.

Dinero:

1 duro → 5 pts	1 euro → 166'384 pts
2 duros → 10 pts	2 euros →
3 duros → 15 pts	3 euros →
...	...
10 duros → ___ pts	20 euros → ___ pts

Tiempo:

1 hora → 60 minutos	1 minuto → 60 segundos
....	...

Longitud:

1 pulgada → 2'54 centímetros	1 metro → 100 centímetros
...	...

Unidades comunes:

1 persona → 10 dedos	1 coche → 4 ruedas
...	...

Esta actividad se debe proponer también de manera que en lugar de multiplicar por un factor constante la operación consista en dividir:

600 céntimos → 6 euros
300 céntimos → ___ euros
...

6 refrescos → 180 céntimos
3 refrescos → ___ céntimos
___ refrescos → 60 céntimos
...

Estas actividades se pueden proponer desde los primeros niveles.

Actividad 2: ¿Qué hay en la bolsa?

Esta actividad pone en juego nociones informales sobre probabilidad considerada como una razón. Poner fichas de dos colores en una bolsa. Por ejemplo, 4 rojas y 8 azules. Explicar a los alumnos que hay fichas de colores diferentes dentro de la bolsa, pero no decir el número de fichas ni el número de colores. Sacudir la bolsa y hacer que un alumno saque una ficha, registre el color y volver a ponerla dentro de la bolsa. Después de 10 o 15 extracciones, preguntar cuántas fichas de cada color piensan que puede haber en la bolsa y anotar el número que digan. Después de algunos ensayos más, preguntar cuál es el menor número posible de fichas que piensan puede haber en la bolsa.
A continuación se puede dar a los alumnos uno de los siguientes datos: el número total de fichas que hay en la bolsa o el número de fichas de uno de los colores. Ver si con esta información pueden predecir cuántas fichas de cada color hay en la bolsa. "¿Qué ocurriría si hubiera más

fichas? ¿Qué otros números de cada color podría haber en la bolsa?
La discusión es útil aunque los niños no acierten la razón correcta de fichas de cada color. Se puede continuar extrayendo fichas para ver que la razón se mantiene, aunque no de manera exacta.
La experiencia se puede variar cambiando la razón entre el numero de fichas de cada color, o incluso añadir fichas de otro color. Después de ver el contenido de la bolsa, discutir qué otros números de fichas de cada color produciría el mismo resultado. Los grupos de alumnos pueden explorar la extracción de fichas en bolsas con razones iguales de colores pero con números de fichas diferentes y comparar los resultados.

3.3. Actividades de construcción y medición

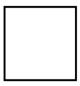
En estas actividades se hacen mediciones para construir modelos físicos o visuales de razones equivalentes con el fin de proporcionar ejemplos tangibles de proporciones y observar relaciones numéricas.

Actividad 3: Unidades diferentes, razones iguales

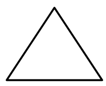
Cortar tiras de cartulina de la misma longitud y dar una tira a cada uno de los grupos de alumnos formados en la clase. Cada grupo tiene que medir la tira usando una unidad diferente. Como posibles unidades se pueden utilizar regletas de Cuisenaire, unidades estándares como el centímetro o el decímetro, o bien otras tiras de cartulina. Interesará que la longitud seleccionada para la tira a medir sea un múltiplo de las unidades de medida para evitar problemas con la precisión de las mediciones.
Cuando cada grupo haya medido su tira, preguntar por la medida obtenida por uno de los grupos y mostrar la unidad que han usado. A continuación, muestre la unidad usada por otro grupo, y hacer que la clase la compare con la primera unidad. Ver si la clase puede estimar la medida obtenida por el segundo grupo. La razón de las unidades de medida deberá ser la inversa de las medidas hechas con esas unidades. Por ejemplo, si las dos unidades están en la razón 2 a 3, las respectivas medidas estarán en la razón de 3 a 2. Repetir el proceso con otras unidades. Finalmente, presentar una unidad que ningún grupo haya usado y ver si la clase puede predecir la medida que se obtiene con esa nueva unidad.

Actividad 4: Construcciones con palillos[4]

Se proporciona a los alumnos unos 60 palillos y una hoja de papel milimetrado. Se les pide que construyan traiángulos y cuadrados cuyo lado esté formado por 1, 2, 3... palillos, completando la tabla que reproducimos a continuación:



Lado	Perímetro

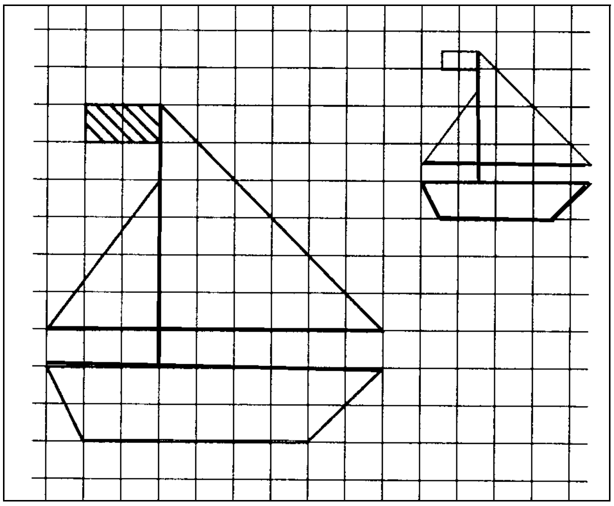


Lado	Perímetro

Se pide a los alumnos dibujar, sobre unos mismos ejes de coordenadas una gráfica que relaciones el lado con el perímetro para el cuadrado y el triángulo equilátero.
Se pide adivinar, sin tener que calcularlo el perímetro de un triángulo y cuadrado si el lado está formado por 15 palillos, utilizando la gráfica.

Actividad 5: Dibujos a escala

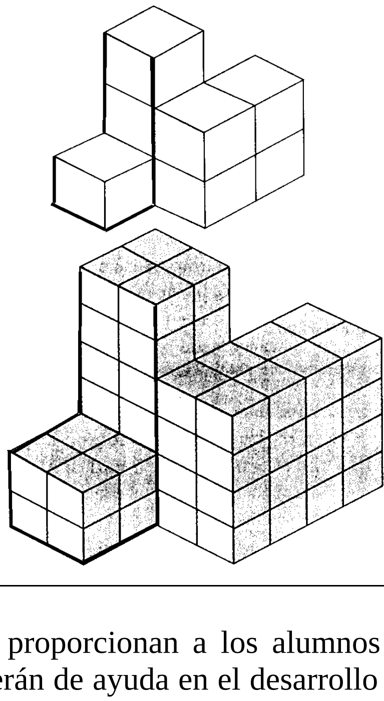
Sobre papel cuadriculado pedir a los alumnos que dibujen una figura sencilla sobre las líneas de la cuadrícula. Pedir que dibujen una figura de igual forma pero de mayor o menor tamaño. Después de repetir la actividad haciendo figuras de distintas dimensiones pero igual forma comparar las razones de las longitudes de los distintos lados.
Los lados que se correspondan en dos figuras deberán conservar la misma razón. De igual modo la razón entre dos lados de una misma figura deberá ser la misma que la razón entre los dos lados correspondiente en la figura transformada.
Esta actividad relaciona la idea geométrica de semejanza con el concepto numérico de razón.



Actividad 6: Razones entre longitudes, áreas y volúmenes

Esta actividad es una versión tridimensional de la anterior. Usando piezas cúbicas encajables construir un “edificio” simple como se muestra en la figura adjunta. Construir un edificio con la misma forma pero de mayor tamaño y comparar las medidas de los lados, las áreas y los volúmenes.
Observar que los volúmenes y las áreas no varían proporcionalmente con los lados de los cuerpos.

Si dos figuras son semejantes cualquier par de dimensiones lineales que se midan están en la misma razón, por ejemplo 1 a k. Pero las áreas que se corresponden estarán en la razón de 1 a k^2, mientras que los volúmenes estarán en la razón de 1 a k^3.

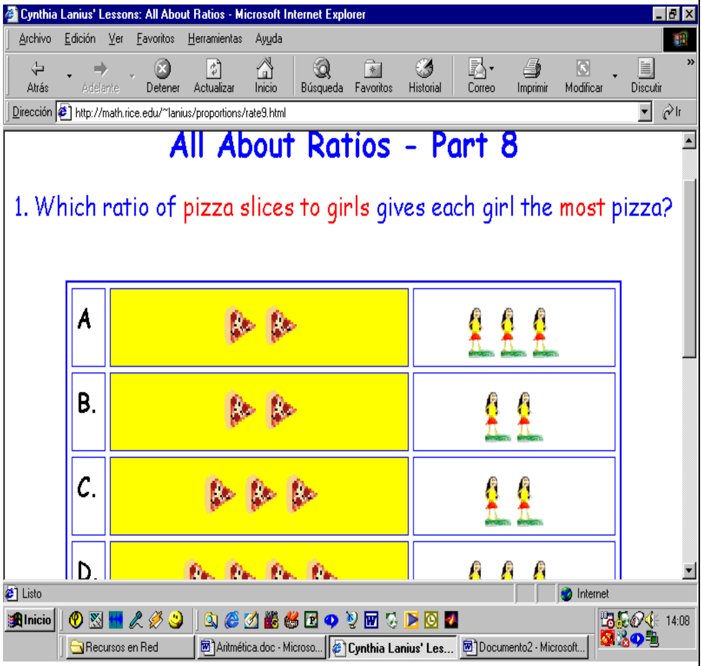


Las actividades descritas hasta este momento proporcionan a los alumnos un concepto intuitivo de razón y proporción, por lo que serán de ayuda en el desarrollo del razonamiento proporcional. Una utilidad práctica de este tipo de razonamiento se refiere al cálculo de valores desconocidos de alguno de los cuatro términos que intervienen en una proporción. El conocimiento de una razón se puede usar para hallar el valor de otra. Las comparaciones de precios, el uso de escalas en los mapas, la solución de problemas de porcentajes son algunos ejemplos de situaciones prácticas en las que se precisa resolver proporciones. Los alumnos deberán aprender a plantear estos problemas de manera simbólica y a resolverlos, aunque esto se hará en los niveles de educación secundaria.

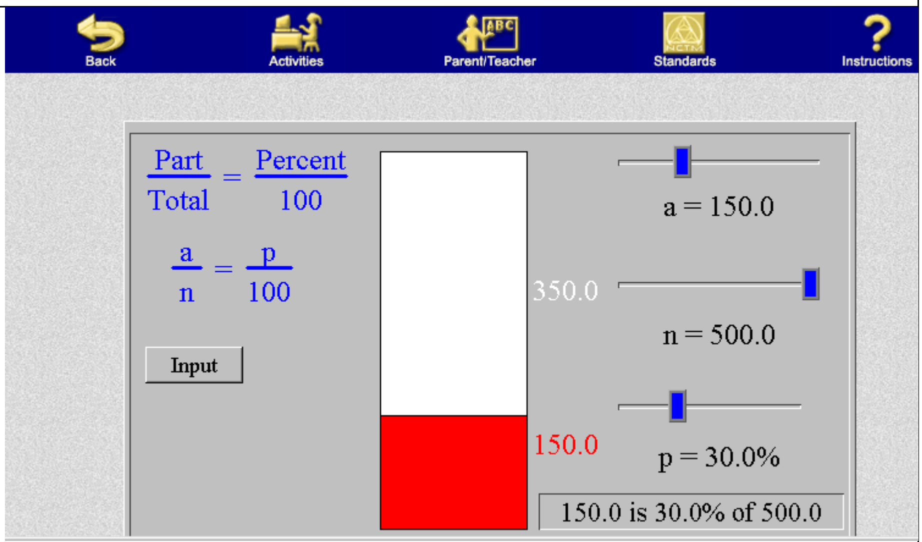
3.4 Recursos en Internet

1. Todo sobre las razones: http://math.rice.edu/~lanius/proportions/index.html

Este servidor presenta actividades para los alumnos de 5º y 6º mediante las cuales se puede construir de una manera constructiva la idea de razón y comparar razones. Se recomienda el trabajo de los alumnos por parejas en un ordenador conectado a la red. Contiene también una prueba de evaluación que indica el número de aciertos y algunos problemas. Los ejercicios se corrigen en red pudiendo el profesor obtener un registro escrito. Es parte de un laboratorio general de matemáticas escolares, que incluye actividades para los otros temas de primaria.



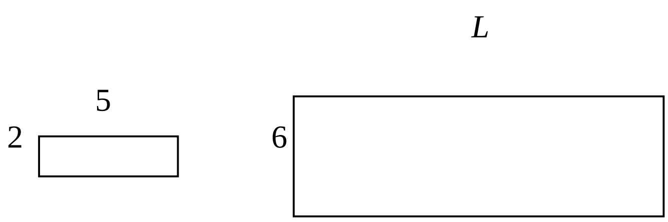
2. Manipulativos visuales: porcentajes
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_160_g_1_t_1.html



El programa pide dos datos como entrada de los tres que intervienen en un porcentaje: una cantidad total *n*, una parte *a* de ese total y un porcentaje *p*. Gráficamente se representa la fracción correspondiente. Los cursores de la derecha permiten de una manera dinámica cambiar uno de los datos y ver el resultado en el gráfico y numéricamente.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

4.1. Razones y proporciones



Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante. Por ejemplo, cuando se les pide encontrar la longitud del lado *L*, los alumnos dicen con frecuencia que es 9 en lugar de 15. Los alumnos tienden a sumar una cantidad en lugar de multiplicar por un factor de escala.

Para resolver el problema de las mezclas (comparar en qué jarra el sabor del zumo de limón es más intenso, descrito en la sección 2), la estrategia aditiva consistiría es comparar la diferencia entre vasos de agua y zumo de limón en cada jarra. También hacemos notar que algunas estrategias propias de una etapa sirven para resolver con éxito los problemas más sencillos, que presentamos en la Tabla 1, pero no son válidos en el caso general.

4.2. Porcentajes

La comprensión de los porcentajes se considera con frecuencia como fácil de lograr pero hay datos experimentales abundantes de lo contrario. El uso incorrecto de los porcentajes es frecuente no sólo entre los estudiantes de secundaria sino incluso también en los adultos. Se encuentran errores flagrantes, lo que sugiere que con frecuencia las ideas básicas pueden no estar claras. Por ejemplo, en algunas investigaciones se ha encontrado que alrededor de la tercera parte de los estudiantes de 17 años respondieron erróneamente la siguiente cuestión:

"Si el 5% de los alumnos han faltado hoy a clase, ¿5 de cuántos han faltado?"
Un error en esta idea fundamental sobre los porcentajes sugiere que no sabían que 100 es la base de comparación de los porcentajes.

En otra investigación, alrededor de la mitad de los alumnos de 6º curso de primaria respondieron erróneamente la pregunta: *"¿Cuál es el 100% de 48?"*

Es fácil encontrar en los medios de comunicación anuncios que revelan errores, confusiones y distorsiones sobre el uso de los porcentajes. Indicamos dos ejemplos[5]:
1. *"Precios rebajados el 100%"*.
Si este anuncio fuera correcto, los artículos serían gratis. Probablemente, los precios se redujeron el 50%. Si un producto que costaba originalmente 400 E. se vendía a 200 E., el anuncio calculó el 100% sobre el precio de venta, cuando debería haberlo hecho sobre el precio original.

2. "De todos los doctores consultados, el 75% recomendó nuestro producto".
Este tipo de afirmación podría ser un anuncio de alguna compañía. Si el anuncio dijera que "3 de cada 4 doctores que hemos entrevistado recomienda nuestro producto", la reacción del consumidor podría ser diferente. Los porcentajes se pueden usar con frecuencia para disfrazar los números implicados. Los porcentajes permiten hacer comparaciones de manera fácil debido al uso común de la base 100, pero pueden llevar a suponer que se ha usado una muestra mayor de la que efectivamente se ha usado.

4.3. Items de evaluación

A continuación incluimos información sobre algunos ítems usados en investigaciones sobre razonamiento proporcional y sus porcentajes de éxito a diferentes edades. Indicar cuál es la solución correcta y algunas soluciones incorrectas para cada uno de ellos.

Item1[6]. Encuentra el término que falta para que las dos fracciones sean equivalentes

	Porcentaje des respuestas correctas	
Fracción	12 años	13 años
1/3= 2/?	72	77
4/12= 1/?	56	52
2/7 = ¿/4	57	63

Item 2[7]. Supongamos que x/y representa un número. Si se duplican los valores de x e y el nuevo número es:

- la mitad de grande que x/y
- igual a x/y
- doble de grande que x/y

(15% de respuestas correctas a los 9 años; 18% de respuestas correctas a los 11 años).

Item 3[8]. Una clase de matemáticas tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

	Porcentajes de respuestas		
	11 años	12 años	13 años
Es más probable que el nombre sea de un niño	7.7	3.4	2.7
Es más probable que el nombre sea de una niña	63.7	75.9	68.5
Es igual de probable que sea de un niño que de una niñ	26.4	20.7	28.8

Item 4. Si 2 /25 = n/500 , entonces *n* =

A) 10 ; B) 20; C) 30; D) 40; E) 50

Item 5. Si se sube el precio de una lata de guisantes de 50 a 60 pesetas, ¿Cuál es el porcentaje de aumento en el precio?

A) 83.3% ; B) 20%; C) 18.2%; D) 16.7%; E) 10%

Item 6. La profesora pregunta por qué 4/5 es mayor que 2/3. ¿Cuál de los siguientes niños razonó correctamente?

A) María dijo "porque 4 es mayor que 2"
B) Juan dijo; " porque 5 es mayor que 3"
C) Sonia dijo. "porque 4/5 está más cerca de 1 que 2/3"
D) Jaime dijo: "porque 4 + 5 es más que 2 + 3."

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Estudia el desarrollo del tema de "razones, proporciones y porcentajes" en dichos niveles.
2. Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
3. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
4. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de una evaluación escolar

En el anexo 1 (a continuación) se dan tres ejercicios (A, B, y C) propuestos por un maestro en una evaluación final. En el anexo 2 se dan las respuestas de seis alumnos al ejercicio C. Responde a las siguientes cuestiones referidas a los ejercicios de esta evaluación y las respuestas dadas por los alumnos.

Cuestión 1: ¿Qué nociones matemáticas se utilizan se utilizan en los tres ejercicios?. Para cada uno de ellos, indica las magnitudes que se ponen en correspondencia y expresa simbólicamente la función que relaciona a estas magnitudes.
Cuestión 2: Resuelve de tres maneras diferentes el ejercicio B. Indica las propiedades de la noción que utilizas en cada caso.
Cuestión 3: Analiza las variables didácticas puestas en juego en estos tres ejercicios y deduce un orden de dificultad para los alumnos del primer ciclo de ESO.
Cuestión 4: Estos ejercicios están planteados en un contexto numérico. Inventa otros dos ejercicios de matemáticas para el primer ciclo de ESO que pongan en juego la misma noción matemática en otros contextos.

Anexo 1:

Ejercicio A: Un panadero utiliza la siguiente tabla para obtener el precio de venta de los panes:

Número de panes	5	10	15
Precio a pagar	15	30	45

a) ¿Cuál es el precio de venta de 15 panes; b) Utiliza la tabla para calcular el precio de venta de 25 panes.

Ejercicio B: Un tren circula siempre a la misma velocidad. Tarda 6 minutos en recorre 9 kilómetros y 10 minutos para recorrer 15 kilómetros. a) ¿Cuál es la distancia recorrida en 16 minutos?; b) ¿Cuál es la distancia recorrida en 30 minutos?

Ejercicio C: Para hacer un mouse de chocolate para 9 personas se necesitan 6 huevos. Para 15 personas se precisan 10 huevos. a) ¿Cuántos huevos se necesitan para hacer el pastel para 24 personas?; b) ¿Y para 30 personas?.

Anexo 2*: Soluciones de 6 alumnos al ejercicio C:*

A1: a) Se necesitan 24 huevos para 24 personas; b)Se necesitan 30 huevos para 30 personas.

A2: a) 24 +3 = 27 huevos; b) 30 + 5 = 35 huevos.

A3: a) Número de huevos para 1 persona: 9:6 = 1'5.
Número de huevos para 24 personas 24 x 1'5 = 36'0
b) Número de huevos para 30 personas: 30 x 1'5 = 45'0.

A4: a) Son necesarios 19 huevos; b) Son necesarios 25 huevos.

A5: a) Se necesitan 21 huevos; b) Se necesitan 27 huevos

A6: a) Son necesarios: 15 + 9 = 24
10 + 6 = 16 huevos
b) Para 30 personas, 15 x 3 = 45 huevos.

Bibliografía

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.

Fernandez, F. (2001). Proporcionalidad entre magnitudes. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 533-558). Madrid: Síntesis.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Hoffer, A. R. Ratios and proportional thinking. En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.

Maurin, C. y Johsua, A. (1993). *Les outils numériques à l'école primaire et au collègue*, Vol 2. París: Editions Marketing (Ellipses).

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11 (3), 331-363.

Reys, R. E. y cols (2001). *Helping children learn mathematics*. New York: John Wiley

Van de Walle, J. A. (2001).*Elementary and middle school mathematics*. New York: Longman.

IV.

Didáctica de la Geometría para Maestros

Juan D. Godino
Francisco Ruiz

Índice

Capítulo 3:
ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

IV.

Didáctica de la Geometría para Maestros

Capítulo 1:

FIGURAS GEOMÉTRICAS

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

El Diseño Curricular Base para la Educación Primaria propuesto por el MEC para el área de Matemáticas incluye entre los diez objetivos generales de la educación matemática para este nivel uno que hace mención expresa a la geometría:

9. Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos, propiedades y relaciones entre las mismas para incrementar su comprensión de dicho entorno y desarrollar nuevas posibilidades de acción en el mismo.

El desarrollo de los diez objetivos se organiza en cinco bloques de contenido, entre los cuales dos se refieren a contenidos de geometría. En cada uno de ellos se especifican un listado de "*conceptos, hechos y principios*", "*procedimientos*" y "*actitudes, valores y normas*".

En el bloque 4 se abordan los contenidos relacionados con las formas planas y espaciales. Se encuentra especialmente relacionado con los bloques de "Medida: información cuantitativa sobre los objetos y el tiempo" y de "Organización y representación en el espacio". Se pretende reconocer e identificar cuerpos y formas geométricas sencillas desde perspectivas diferentes, establecer relaciones entre ellos y sus elementos, representar formas y construir cuerpos, y por último, llegar a su descripción completa. Se dará gran importancia a la adquisición de los contenidos actitudinales como medio de exploración y acceso a los contenidos conceptuales.

Hechos, conceptos y principios

1. Formas planas.
• Las figuras y sus elementos (polígonos y circunferencia).
• Relaciones entre los elementos de una figura y de las figuras entre si.
• Regularidades y simetrías.
• Suma de los ángulos de un triángulo.
2. Formas espaciales.
• Los cuerpos geométricos *y* sus elementos: vértices, aristas *y* caras.
• Cubo, esfera, prismas, pirámides, conos *y* cilindros.
• Relación entre los elementos del cubo.
• Regularidades *y* simetrías.

Procedimientos

1. Descripción de la forma de objetos familiares utilizando adecuadamente el vocabulario geométrico básico.
2. Construcción de figuras geométricas planas (polígonos y circunferencias) a partir de datos previamente establecidos.
3. Construcción de cuerpos geométricos.
4. Comparación y clasificación de figuras planas y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios.
5. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
6. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
7. Trazado de una figura simétrica de otra respecto d eun elemento dado (puntos y ejes de simetría)
8. Utilización de los instrumentos de dibujo (regla,compás, escuadra, cartabón, círculo graduado) para la construcción y exploración de formas geométricas.

Actitudes, valores y normas

1. Curiosidad e interés por identificar formas y relaciones geométricas en los objetos del entorno.
2. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio.
3. Gusto por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.
4. Disposición favorable para la utilización de los instrumentos convencionales de dibujo y para la búsqueda de instrumentos alternativos.

1.2. Principios y Estándares 2000 del NCTM

Los Principios y Estándares 2000 proponen que los programas de enseñanza de matemáticas desde la educación infantil hasta el bachillerato deben capacitar a todos los alumnos para,

- analizar las características y propiedades de los objetos de dos y tres dimensiones y desarrollar argumentos sobre las relaciones geométricas;
- especificar posiciones de los objetos en el espacio y describir relaciones espaciales usando la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación;
- aplicar transformaciones geométricas y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;
- usar la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas (NCTM 2000, p. 41).

En el cuadro siguiente resumimos la concreción de estos objetivos generales a los niveles de educación infantil y primaria (K-5 en la terminología de EE.UU.). La formulación de estándares para el grado 6º está ligado a los grados 7º y 8º en esta propuesta curricular.

Objetivos generales	Infantil a 2º curso	3º a 5º curso
Analizar características y propiedades de las formas geométricas bi y tridimensionales y desarrollar argumentos matemáticos sobre las relaciones geométricas.	- reconocer, nombrar, construir, dibujar, comparar y clasificar formas bi y tridimensionales; - describir atributos y partes de las formas bi y tridimensionales - investigar y predecir los resultados de agrupar y separar formas bi y tridimensionales.	- identificar, comparar, y analizar atributos de las formas bi y tridimensionales y desarrollar el vocabulario para describir los atributos; - clasificar formas bi y tridim. Según sus propiedades y formular definiciones de clases de formas tales como triángulos y pirámides; - investigar, describir y razonar sobre los resultados de subdividir, combinar y transformar formas; - explorar la congruencia y semejanza de figuras; - formular y probar conjeturas sobre propiedades y relaciones geométricas y desarrollar argumentos lógicos para justificar conclusiones.
Especificar posiciones y describir relaciones	- describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición	- describir posiciones y movimientos usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico; - construir y usar sistemas de coordenadas

espaciales usando la geometría de coordenadas y otros sistemas de representación.	relativa; - describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia; - encontrar y nombrar posiciones con relaciones simples, como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como en los mapas.	para especificar posiciones y describir trayectorias; - encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del sistema de coordenadas.
<u>Aplicar transformaciones</u> y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas.	- reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías; - reconocer y crear formas que tengan simetría.	- predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales; - describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes; - identificar y describir las simetrías en formas y figuras bi y tridimensionales.
<u>Usar la visualización</u>, el razonamiento espacial y la modelización geométrica para resolver problemas.	- crear imágenes mentales de las formas geométricas usando memoria espacial y visualización espacial; - reconocer y representar formas en diferentes perspectivas; - relacionar las ideas geométricas con las ideas sobre números y medidas; - reconocer formas y estructuras en el entorno y especificar su localización.	- construir y dibujar objetos geométricos; - crear y describir imágenes mentales, patrones y trayectorias; - identificar y construir objetos tridimensionales a partir de sus representaciones bidimensionales; - identificar y dibujar una representación bidimensional de un objeto tridim.; - usar modelos geométricos para resolver problemas en otras áreas de las matemáticas, tales como números y medida; - reconocer ideas geométricas y relaciones y aplicarlas a otras disciplinas y a problemas que surgen en la clase o en la vida diaria.

Ejercicio 1:
Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de las figuras geométricas en:
- Diseño Curricular Base (MEC)
- Orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Las investigaciones de Piaget sobre el desarrollo de conceptos geométricos[1]

Las primeras interacciones del niño pequeño con su entorno, previas al desarrollo del lenguaje, se basan casi totalmente en experiencias espaciales, muy en particular a través de los sentidos de la vista y el tacto. Más tarde se desarrolla el lenguaje y adquiere significado en el seno y en el contexto del entorno físico.

Piaget, como resultado de sus numerosos experimentos propuso una teoría del desarrollo de los conceptos espaciales en el niño. Distingue entre *percepción*, que define como el "conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos", y *representación* (o imagen mental), que "comporta la evocación de objetos en ausencia de ellos". Las capacidades de percepción del niño se desarrollan hasta la edad de dos años (estadio 'sensoriomotor'), mientras que la capacidad de reconstrucción de imágenes espaciales comienza hacia la edad de dos años, y en la mayoría de los casos es perfeccionada desde los siete años en adelante en el niño medio (el período de 'operaciones concretas'). Mientras que los tests de "percepción" pueden fundarse en la capacidad de discriminación entre diferentes objetos presentados visualmente, los tests de "representación" (imaginería mental) de que se vale Piaget se fundan en la capacidad para identificar formas al tacto y en la capacidad para reproducir formas mediante palillos o dibujos.

En cada uno de estos estadios de desarrollo, Piaget distingue, además, una progresiva diferenciación de propiedades geométricas, partiendo de aquellas propiedades que él llama *topológicas*, o sea, propiedades globales independientes de la forma o el tamaño, como son las siguientes:

- cercanía ("proximidad"); por ejemplo, dibujar un hombre con los ojos juntos, aun cuando éstos puedan haber sido situados por debajo de la boca;
- separación; por ejemplo, no traslapar la cabeza y el cuerpo;
- ordenación; por ejemplo, dibujar la nariz entre los ojos y la boca;
- cerramiento, como dibujar los ojos dentro de la boca;
- continuidad, como hacer que los brazos formen un continuo con el tronco y no con la cabeza.

El segundo grupo de propiedades que según Piaget distinguen los niños son las que denomina propiedades *proyectivas*, que suponen la capacidad del niño para predecir qué aspecto presentará un objeto al ser visto desde diversos ángulos. Por ejemplo, los niños pequeños pueden querer dibujar una cara de perfil y seguir, sin embargo, poniendo dos ojos en ella; o pueden no ser capaces de darse cuenta de que al mirar un lápiz desde un extremo se verá un círculo. La "rectitud" es una propiedad proyectiva, dado que las líneas rectas siguen mostrando aspecto rectilíneo cualquiera que sea el punto de vista desde el que se las observe.

El tercer grupo de propiedades geométricas son las euclídeas, esto es, las relativas a tamaños, distancias y direcciones, que conducen por lo tanto a la medición de longitudes, ángulos, áreas, etc. Se pueden distinguir, por ejemplo, un trapecio y un rectángulo basándose en los ángulos y en las longitudes de los lados. (Desde el punto de vista proyectivo, ambas figuras son equivalentes, ya que el tablero de una mesa rectangular ofrece aspecto de trapecio visto desde ciertos ángulos). Los niños pueden en este estadio reproducir la posición exacta de un punto en una página, o una figura geométrica, y decidir qué líneas y ángulos han de medir para ello[2].

[1] Dickson et al. (1991, p. 22-23).

[2] Remitimos al lector al libro citado de Dickson et al. (1991, p. 25-26) para conocer algunas críticas y revisiones de la teoría de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento espacial de los niños.

2.2. El modelo de los niveles de van Hiele

En la didáctica de la geometría ha tenido una fuerte influencia el trabajo desarrollado por Pierre van Hiele y Dina van Diele-Geldof para comprender y orientar el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. El modelo teórico conocido como de "los niveles de van Hiele" comenzó a proponerse en 1959 y ha sido objeto de abundantes experimentaciones e investigaciones que han llevado a introducir diversas matizaciones, pero que aún continúa siendo útil para organizar el currículo de geometría en la educación primaria y secundaria.

En este modelo se proponen cinco niveles jerárquicos para describir la comprensión y el dominio de las nociones y habilidades espaciales. Cada uno de los cinco niveles describe procesos de pensamiento que se ponen en juego ante tareas y situaciones geométricas. A continuación describimos brevemente las características de los cinco niveles y los tipos de actividades que pueden desarrollarse en cada uno de ellos[3].

Nivel 0: Visualización:
Los objetos de pensamiento en el nivel 0 son formas y se conciben según su apariencia

Los alumnos reconocen las figuras y las nombran basándose en las caracteristicas visuales globales que tienen. Los alumnos que razonan según este nivel son capaces de hacer mediciones e incluso de hablar sobre propiedades de las formas, pero no piensan explícitamente sobre estas propiedades. Lo que define una forma es su apariencia. Un cuadrado es un cuadrado "porque se parece a un cuadrado". Debido a que la apariencia es el factor dominante en este nivel, esta apariencia puede llevar a atribuir propiedades impertinentes a las formas. Por ejemplo, un cuadrado que se ha girado 45º respecto de la vertical puede que no se considere un cuadrado por un sujeto de este nivel. "Pongo estas formas juntas porque tienen el mismo aspecto", sería una respuesta típica.

Los productos del pensamiento del nivel 0 son clases o agrupaciones de formas que parecen ser "similares".

Nivel 1: Análisis
Los objetos de pensamiento en el nivel 1 son clases de formas, en lugar de formas individuales.

Los estudiantes que razonan según este nivel son capaces de considerar todas las formas incluidas en una clase en lugar de una forma singular. En lugar de hablar sobre este rectángulo, es posible hablar sobre todos los rectánculos. Al centrarse en una clase de formas, los alumnos son capaces de pensar sobre lo que hace que un rectángulo sea un rectángulo (cuatro lados, lados opuestos paralelos, lados opuestos de la misma longitud, cuatro ángulos rectos, diagonales congruentes, etc.). Las características irrelevantes (como el tamaño o la orientación) pasan a un segundo plano. Los estudiantes comienzan a darse cuenta de que una colección de formas pertenecen a la misma clase debido a sus propiedades. Si una forma pertenece a la clase de los cubos, tiene las propiedades correspondientes a esa clase. "Todos los cubos tienen seis caras congruentes, y cada una de estas caras es un cuadrado". Estas propiedades estaban como implícitas en el nivel 0. Los sujetos del nivel 1 pueden ser capaces de listar todas las propiedades de los cuadrados, rectángulos, y paralelogramos, pero no ver las relaciones de inclusión entre estas clases, que todos los cuadrados son rectángulos y todos los rectángulos son paralelogramos. Cuando se les pide que definan una forma, es probable que listen todas las propiedades que conozcan.

Los productos del pensamiento del nivel 1 son las propiedades de las formas.

[3] Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

Nivel 2: Deducción informal
Los objetos del pensamiento del nivel 2 son las propiedades de las formas

A medida que los estudiantes comienzan a ser capaces de pensar sobre propiedades de los objetos geométricos sin las restricciones de un objeto particular, son capaces de desarrollar relaciones entre estas propiedades. “Si los cuatros ángulos son rectos, la figura es un rectángulo. Si es un cuadrado, todos los ángulos son rectos. Si es un cuadrado, entonces debe ser un rectángulo”. Con una mayor capacidad de usar el razonamiento “si – entonces”, las figuras se pueden clasificar usando sólo un mínimo de características. Por ejemplo, cuatro lados congruentes y al menos un ángulo recto puede ser suficiente para definir un cuadrado. Los rectángulos son paralelogramos con un ángulo recto. Las observaciones van más allá de las propias propiedades y comienzan a centrarse en argumentos lógicos sobre las propiedades. Los estudiantes del nivel 2 serán capaces de seguir y apreciar un argumento deductivo informal sobre las formas y sus propiedades. “Las demostraciones” pueden ser más de tipo intuitivo que rigurosamente deductivas. Sin embargo, se entiende que un argumento lógico tiene características que obligan a aceptar la conclusión. La comprensión de la estructura axiomática de un sistema deductivo formal no llega a alcanzarse.

Los productos de pensamiento del nivel 2 son relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.

Nivel 3: Deducción
Los objetos de pensamiento en el nivel 3 son relaciones entre propiedades de los objetos geométricos.

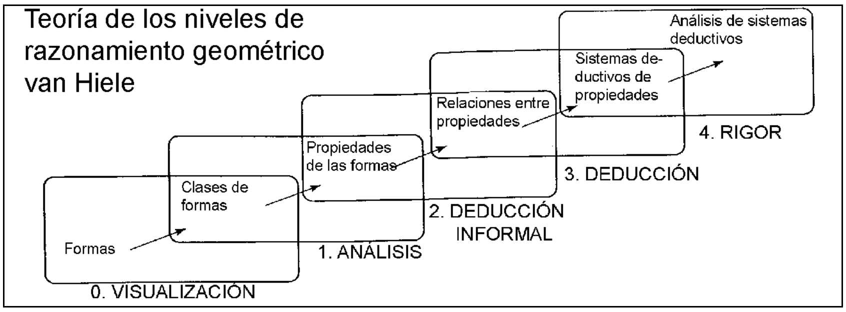
En este nivel los estudiantes son capaces de examinar algo más que las propiedades de las formas. Su pensamiento anterior ha producido conjeturas sobre relaciones entre propiedades. ¿Son correctas estas conjeturas? ¿Son verdaderas? A medida que tiene lugar este análisis de los argumentos informales, la estructura de un sistema completo de axiomas, definiciones, teoremas, corolarios, y postulados comienza a desarrollarse y puede ser considerada como el medio necesario para establecer la verdad geométrica. Los sujetos de este nivel comienzan a apreciar la necesidad de construir un sistema lógico que repose sobre un conjunto mínimo de supuestos y a partir del cual se deriven todas las proposiciones. Estos estudiantes son capaces de trabajar con enunciados abstractos sobre propiedades geométricas y llegar a conclusiones basadas más sobre la lógica que sobre la intuición. Este es el nivel requerido en los cursos de geometría de bachillerato. Un estudiante operando en este nivel 3 puede observar claramente que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio, de la misma manera que lo puede hacer un estudiante situado en un nivel inferior. Sin embargo, en el nivel 3, se aprecia la necesidad de probar esta proposición a partir de una serie de argumentos deductivos. El estudiante del nivel 2 puede seguir el argumento, pero no reconoce la necesidad de hacer la demostración deductiva.

Los productos del pensamiento del nivel 3 son sistemas axiomáticos deductivos para la geometría.

Nivel 4: Rigor
Los objetos de pensamiento del nivel 4 son sistemas axiomáticos para la geometría.

En el nivel máximo de la jerarquia de pensamiento geométrico propuesto por van Hiele, el objeto de atención son los propios sistemas axiomáticos, no las deducciones dentro de un sistema. Se aprecian las distinciones y relaciones entre los diferentes sistemas axiomáticos. Este es el nivel requerido en los cursos universitarios especializados en los que se estudia la geometría como una rama de las matemáticas.

Los productos de pensamiento del nivel 4 son comparaciones y contrastes entre diferentes sistemas axiomáticos de geometría.



Características de los niveles
La principal característica de este modelo de pensamiento geométrico es que en cada nivel (excepto en el 4º) se deben crear unos objetos (ideas) de manera que las relaciones entre estos objetos se convierten en los objetos del siguiente nivel. Hay por tanto un progresivo ascenso en la abstracción y complejidad de los conocimientos que se ponen en juego. Además de este rasgo el modelo postula las siguientes características:
1. Los niveles son secuenciales. Para lograr un cierto nivel superior al 0 los alumnos deben superar los niveles previos. Esto implica que el sujeto ha experimentado el pensamiento geométrico apropiado para ese nivel y ha creado en la propia mente los tipos de objetos o relaciones que son el foco de atención del pensamiento del nivel siguiente.
2. Los niveles no son dependientes de la edad en el sentido de los estadios de desarrollo de Piaget. Un alumno de tercero de primaria puede estar en el nivel 0 al igual que uno de bachillerato. Algunos estudiantes y adultos pueden permanecer siempre en el nivel 0, y un número importante de personas adultas no alcanzan nunca el nivel 2. Sin embargo, la edad está relacionada con la cantidad y tipo de experiencias geométricas que tenemos. Por tanto, es razonable aceptar que todos los niños de preescolar a 2º curso de primaria estén en el nivel 0, así como que la mayoría de los niños de 3º y 4º.
3. La experiencia geométrica es el principal factor que influye en la progresión de niveles. Las actividades que permiten a los niños explorar, hablar sobre las experiencias, e interactuar con el contenido del siguiente nivel, además de incrementar sus experiencias con el nivel en que se encuentran, proporcionan la mejor oportunidad de avanzar hacia el siguiente nivel.
4. Cuando la instrucción o el lenguaje usado está a un nivel superior al que tiene el estudiante, habrá un fallo en la comunicación. Los estudiantes a los que se pide enfrentarse con objetos de pensamiento que no han construido en el nivel anterior puede sean forzados a un aprendizaje memorístico y alcanzar sólo temporalmente un éxito superficial. Un estudiante puede, por ejemplo, memorizar que todos los cuadrados son rectángulos sin haber construido esa relación, o bien puede memorizar una demostración geométrica pero fallar en crear los pasos exigidos o comprender la razón de ser del proceso.

Características de las actividades del Nivel 0

- Actividades de clasificación, identificación y descripción de formas variadas.
- Uso de gran cantidad de modelos físicos que se pueden manipular por los niños.
- Ejemplos de una variedad de formas diferentes con objeto de que las características irrelevantes no se perciban como importantes. (Esto evitará que, por ejemplo, muchos alumnos piensen que sólo los triángulos equiláteros son realmente triángulos, o que un cuadrado girado 45º deja de ser un cuadrado)

- Proporcionar oportunidades para que los alumnos construyan, dibujen, compongan o descompongan formas diversas.

Características de las actividades del Nivel 1

- Comenzar a centrar la atención más sobre las propiedades de las figuras que en la simple identificación. Definir, medir, observar y cambiar las propiedades con el uso de modelos concretos.
- Resolver problemas en los que las propiedades de las formas sean aspectos importantes a tener en cuenta.
- Seguir utilizando modelos concretos, como en las actividades del nivel 0, pero usando modelos que permitan la exploración de diversas propiedades de las figuras.
- Clasificar figuras usando las propiedades de las formas como también sus nombres. Por ejemplo, encontrar propiedades de los triángulos que hagan que unos sean similares y otros diferentes.

Características de las actividades del Nivel 2 (primer ciclo de educación secundaria)

- Continuar usando propiedades de los modelos, pero con la atención puesta en la definición de propiedades. Hacer listas de propiedades y discutir qué propiedades son necesarias y cuáles son condiciones suficientes para una forma o concepto específico.
- Comenzar a usar un lenguaje de naturaleza deductiva aunque informal: todos, algunos, ninguno, si entonces, qué ocurre si, etc.
- Investigar la validez de la inversión de ciertas relaciones. Por ejemplo, el enunciado inverso de “Si una figura es un cuadrado debe tener cuatro ángulos rectos” sería, “Si tiene cuatro ángulos rectos, entonces debe ser un cuadrado”.
- Usar modelos y dibujos como herramientas con las que pensar, y comenzar a buscar generalizaciones y contraejemplos.
- Estimular la formulación y demostración de algunas hipótesis.

La mayor parte de los contenidos curriculares propuestos para los niveles de educación infantil y primaria se pueden adaptar a cualquiera de los tres primeros niveles, a excepción de conceptos abstractos tales como punto, recta, semirecta y plano como elementos básicos de las figuras geométricas. Estas ideas abstractas no son apropiadas incluso para el nivel 2.

El nivel 2 de razonamiento es más propio de los alumnos del primer ciclo de educación secundaria (12 a 14 años). Aquí los alumnos comienzan a usar razonamientos deductivos informales. Esto quiere decir que pueden seguir y usar argumentaciones lógicas, aunque pueden tener dificultades para construir una demostración por sí mismos. El uso de modelos físicos de los cuerpos y dibujos geométricos es todavía importante por diferentes razones. En el nivel 1, las exploraciones de los alumnos les llevan a realizar conclusiones inductivas sobre las formas. Estos estudiantes quedan satisfechos de que una afirmación es verdadera porque se cumple en los casos que comprueban. En el nivel 2, los alumnos pueden usar un dibujo para ayudarse en el seguimiento de una argumentación deductiva dada por el profesor. También pueden usar modelos para comprobar conjeturas o encontrar contraejemplos. Los modelos se convierten más en una herramienta para el pensamiento y la verificación que para la exploración.

3. SITUACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

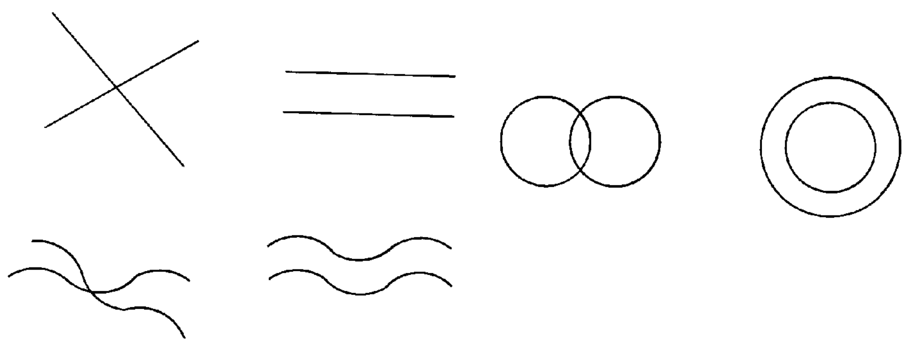
Las actividades que describimos en esta sección son algunos ejemplos que pueden usarse para el trabajo en las aulas de primaria y corresponden a los dos primeros niveles de van Hiele. Las actividades características del nivel 2 son más propias de atención en el primer ciclo de educación secundaria (alumnos de 12 a 14 años).

3.1. Juegos de psicomotricidad

Las situaciones de juegos de psicomotricidad parecen muy recomendables para iniciar el estudio de distintos aspectos de la geometría. En el libro de A. Martínez y F. Juan (1989) encontramos abundantes ejemplos de este tipo de situaciones, así como los fundamentos metodológicos en los que basan su propuesta curricular. A título de ejemplo, describimos, a continuación una situación de este tipo, que pretende familiarizar a los alumnos de infantil y primer ciclo de primaria con diferentes tipo de líneas y regiones planas. Se supone que los niños tienen posibilidad de moverse con libertad por una sala de dimensiones adecuadas.

Actividad 1: Líneas, regiones y psicomotricidad

- Nos movemos libremente por el espacio, al ritmo de una música.
- Nos movemos en grupos.
- Nos movemos en grupos de acuerdo con las líneas que se dibujan en la pizarra:



- Se reparten cuerdas de colores, una por niño. Jugamos con las acuerdas, con el movimiento de las cuerdas.
- Jugamos en grupos. Procuramos que no choquen las cuerdas. Procuramos que choquen.
- Formamos, con las cuerdas, una línea cerrada en el suelo, delimitando un territorio. Nos metemos dentro.
- Formamos, con otras cuerdas, o pintando con tiza en el suelo, líneas entre territorios, que serán caminos. Ponemos un camino entre cada dos territorios. Ponemos un aro en cada cruce de caminos. Cuando suene la música nos moveremos dentro de nuestro territorio o, si nos apetece, vamos por algún camino hasta otro territorio a bailar en él, con el grupo que allí está, si nos dejan. Cuando pasemos por un cruce daremos una palmada.

Remitimos al lector al libro citado de Martínez y Juan (1991, p. 63-66) para encontrar una rica colección de actividades complementarias de exploración de las nociones geométricas fundamentales en la clase de matemáticas.

3.2. Descripción y clasificación de objetos

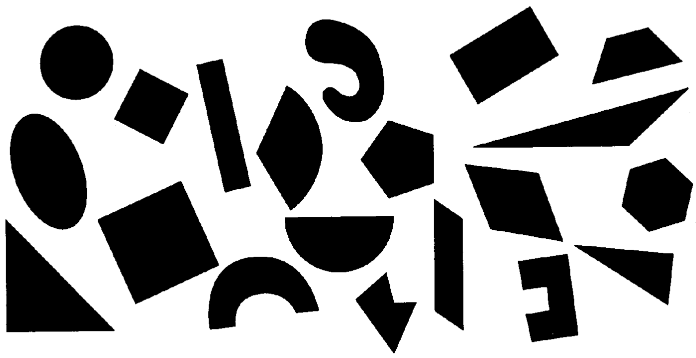
En las primeras actividades se debe partir del propio vocabulario que usan los niños para describir las formas geométricas, introduciendo nuevas palabras a medida que sea apropiado.

La realización de actividades como las siguientes puede ser ocasión de introducir los nombres usuales de los cuerpos geométricos.

Uno de los primeros tipos de actividades más importantes que se pueden proponer a los niños es ofrecerles la oportunidad de encontrar semejanzas y diferencias entre una gran variedad de formas. Muchos niños se centrarán en características no estándares como "puntiagudo" o "curvado", o "se parece a una casa". Otros observarán cosas que realmente no son parte de las formas: "señala hacia arriba", o "está cerca del borde la mesa".

Actividad 2: Clasificación de formas (nivel 0)

Preparar una amplia variedad de formas recortadas en cartulina, como se muestra en la figura (o cualquiera otras). Pedir a los alumnos que seleccionen una forma al azar y después encuentren otras formas que sean parecidas a la primera en algún aspecto. Si se pide formar un subconjunto de figuras cada vez se evita el problema de intentar poner cada forma en una categoría. Los estudiantes deben describir qué rasgo tienen las formas para considerarlas similares, bien oralmente o por escrito. Pedir finalmente que dibujen una nueva forma que se ajuste a la categoría y explicar por qué es de esa clase.



Si el conjunto de formas tiene cinco o seis ejemplos de una forma cuyo nombre es conocido (rectángulo o rombo), es probable que algunos estudiantes las clasifiquen según ese nombre. Pero se les puede pedir que encuentren otras formas que sean "parecidas" a la forma seleccionada. De esta manera, el concepto de esa clase particular de figuras se forma sin ninguna definición expresa. A continuación puede poner una etiqueta al concepto o proporcionar el nombre propio de la forma. Los nombres de las formas deberían siempre darse después de que el concepto de la forma se ha desarrollado.

La clasificación de formas se debe hacer también con formas tridimensionales, usando colecciones de objetos de madera, plástico, u objetos reales como botes, cajas, balones, etc.

Las actividades que corresponden al nivel 1 de razonamiento de van Hiele se centran más en las propiedades de las formas e incluyen algún análisis de dichas propiedades. Por ejemplo, en el nivel 0, los triángulos pueden haberse clasificado como "grandes" y "pequeños", "puntiagudo" o "no puntiagudo", o "con esquinas cuadradas" y "sin esquinas cuadradas". En el nivel 1, el mismo conjunto de triángulos se puede clasificar según el tamaño relativo de los ángulos o la longitud relativa de los lados.

La mayor parte de las actividades sugeridas para el nivel 0 se pueden extender fácilmente al nivel 1 cambiando las variables de la tarea.

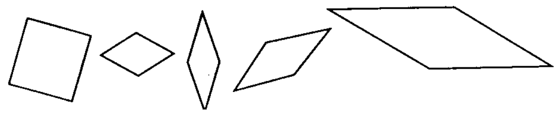
Actividad 3 (nivel 1)

Clasificar las formas por nombres de propiedades y no por nombres de las formas. Cuando se combinan dos o más propiedades, clasificar por una propiedad cada vez. “Encontrar todas las formas que tienen lados opuestos paralelos” (Una vez separadas) “Ahora encontrar las que también tienen un ángulo recto” (Ese grupo debería incluir los cuadrados y los rectángulos que no sean cuadrados). Después de obtenido este grupo de formas, discutir cuál es el nombre de esta clase de figuras. Intentar clasificar las formas por la misma combinación de propiedades pero en un orden diferente.

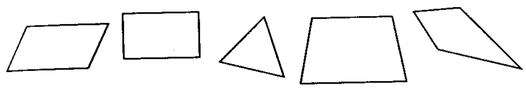
Usar cuerdas o redondeles para separar los conjuntos de formas. Poner dos lazos en el suelo. Hacer que los alumnos pongan dentro de uno de los lazos todas las formas que tengan cuatro lados congruentes y todos los que tengan un ángulo recto en el otro lazo. ¿Dónde colocar los cuadros? Los alumnos se darán cuentan que los dos lazos deben tener una parte común y colocar los cuadrados en la intersección.

Actividad 4: Definición misteriosa (nivel 1)

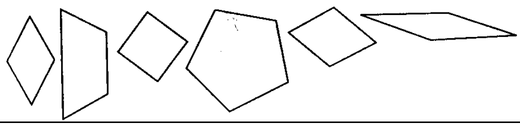
Todas estas figuras tienen algo en común:



Ninguna de éstas otras la tienen:



¿Cuál de las siguientes figuras tienen esa propiedad?



El nombre de una propiedad no es necesario para que sea comprendida. Requiere una observación cuidadosa de las propiedades para descubrir qué tienen en común las formas.

3.3. Construcción y exploración de polígonos

Interesa que los propios niños construyan y dibujen formas. En una primera fase harán formas de manera libre para pasar después a construir otras que cumplan algunas condiciones. Esto promoverá la reflexión sobre las propiedades implicadas y estimulará el paso al nivel 1 de razonamiento sin necesidad de presionar a los niños de manera forzada. Los materiales para realizar estas construcciones pueden ser variados, bien del entorno escolar o bien comerciales (plastilina, cartulina, bloques encajables, trangram, geoplanos, etc.)

3.2.1. Uso del geoplano en el estudio de los polígonos

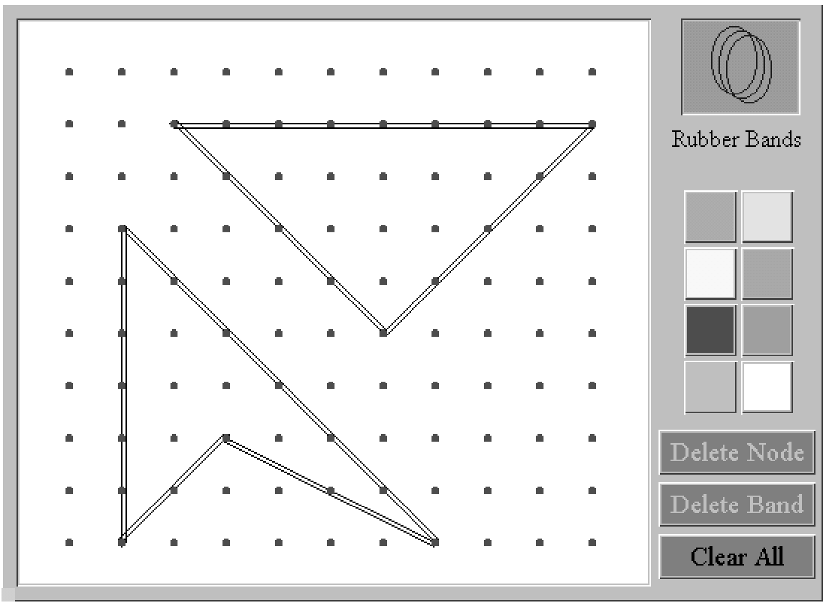
Incluimos en esta sección la descripción del uso del geoplano, bien en su versión manipulativa o virtual (mediante un programa de ordenador), para el estudio de las figuras geométricas planas, en particular el triángulo y los polígonos. Seguiremos la descripción que se hace en la sección de Recursos para la enseñanza de los Principios y Estándares 2000 del NCTM donde es posible utilizar un “geoplano virtual” de una manera interactiva. El geoplano interactivo virtual está disponible en la siguiente dirección web: http://standards.nctm.org/

En el ejemplo se describen actividades usando el geoplano interactivo para ayudar a los estudiantes a identificar figuras geométricas simples, describir sus propiedades, y desarrollar el sentido espacial. La primera parte titulada “Construyendo triángulos” centra la atención sobre el concepto de triángulo, ayudando a los estudiantes a comprender el uso de la palabra ‘triángulo’ en matemáticas y la noción de congruencia en geometría. En la segunda parte, “Construyendo polígonos”, los estudiantes construyen y comparan una variedad de polígonos, describiendo las propiedades características de las formas que crean.

Actividad 5

Construye tantos triángulos como sea posible, de formas y tamaños diferentes, usando para cada uno de ellos una sola goma (o banda) sobre el geoplano. Explica a tu compañero en qué se diferencian estos triángulos y en qué se parecen.

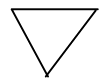
Geoplano interactivo

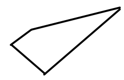


Hablando sobre triángulos en la clase

A los estudiantes les interesa trabajar con los geoplanos, tanto si son virtuales como concretos. Como ocurre con cualquier material manipulativo, los estudianes necesitan un cierto tiempo para explorar el material antes de realizar tareas específicas.

La mayor parte de los alumnos de los niveles de preescolar a 2º curso de primaria conocen la palabra ‘triángulo’ y tienen una idea de lo que significa. Sin embargo, la descripción que hacen del triángulo puede que no corresponda con la convencional. Para estimular a los niños a centrarse en las propiedades del triángulo, los maestros pueden pedir que hagan triángulos diferentes en el geoplano y después seleccionar uno para mostrar a la clase. Los niños pueden comparar los triángulos que han hecho en sus geoplanos y discutir si cada forma es o no un triángulo. Algunos niños pueden pensar que un triángulo con un vértice orientado hacia la base del geoplano no es realmente un triángulo. El maestro puede provocar a los niños para que justifiquen su manera de pensar, incitando a los niños que estén más retraidos a que entren en la discusión con comentarios tales como, “¿Dices que Marco sigue siendo Marco aunque esté haciendo el pino, o sea, que esto sigue siendo un triángulo? Otros alumnos pueden hacer figuras con cuatro lados que consideran como triángulos por su forma puntiaguda.





El maestro puede concluir la explicación diciendo que los matemáticos se han puesto de acuerdo en considerar como triángulos cualquier figura cerrada por tres segmentos. Usando esta definición el profesor puede pedir a los alumnos que comprueben otra vez las formas que han construido y deciden cuáles son triángulos. Esto da otra oportunidad para que los alumnos revisen sus primeras elecciones.

Los alumnos de estos primeros niveles pueden comprobar la congruencia de figuras en el plano moviendo una figura para que cubra exactamente a otra figura. Las figuras hechas en el geoplano se pueden describir con un sistema de coordenadas simples; por tanto dos figuras sobre el geoplano son congruentes si sus construcciones se pueden describir de la misma manera. Si se hacen figuras con dos geoplanos diferentes, uno de los geoplanos se puede mover de manera que eventualmente las construcciones se puedan ver de la misma manera (quizás mediante el volteo de la base por el lado opuesto, o una rotación de 90º). Los alumnos pueden copiar sus triángulos sobre un papel reticulado y después recortarlos de manera que puedan decidir si coinciden o no.

Experiencias de los alumnos con los geoplanos virtuales interactivos

El geoplano virtual permite a los estudiantes sombrear sus figuras y hacer una variedad mayor de triángulos que los permitidos con una geoplano tradicional de una matriz de 5x5 clavos. El maestro puede evaluar la comprensión de los alumnos de las propiedades del triángulo preguntándoles que expliquen cómo saben que todas las formas representadas son triángulos.

Ejercicio 2:

a) ¿Cuáles son algunas de las estrategias que puedes usar para ayudar a los alumnos a centrarse sobre las propiedades de los triángulos cuando construyen figuras de cuatro lados y las consideran como triángulos?

b) ¿Qué experiencias, conocimientos y vocabulario deberían tener los alumnos con el fin de que sean capaces de identificar y definir los triángulos?

c) ¿Cuáles son algunas de las actividades que los estudiantes de estas edades pueden realizar en las que se use la congruencia de figuras?

Actividad 6

Construye las siguientes figuras en el geoplano:

- Tantos cuadrados de distinto tamaño como sea posible
- Tantos hexágonos diferentes de distinto tamaño como sea posible
- El polígono con el menor número de lados que puedas hacer

- El polígono con el mayor número de lados que puedas hacer
- Polígonos con un número de lados entre el menor y el mayor posible.

Estudio de los polígonos en la clase

Por medio de discusiones informales en la clase en pequeños grupos, los maestros ayudan a los alumnos a aprender el vocabulario geométrico así como a aprender las propiedades de los diferentes polígonos. Algunas propiedades de las figuras serán más fáciles de identificar que otras cuando los alumnos tratan de crear una figura sobre el geoplano. Por ejemplo, los polígonos se forman con segmentos, lo que se modeliza mediante una goma o banda que conecta dos nodos, y los polígonos son figuras cerradas. Los alumnos pueden aprender los nombres de figuras específicas que construyen cuando hablan sobre los hexágonos que tienen seis lados y los cuadriláteros que tienen cuatro lados.

Los alumnos pueden construir su polígono favorito en el geoplano y describirlo a la clase. El maestro puede preguntar si dos figuras son congruentes y cómo pueden justificar los alumnos sus afirmaciones. Los alumnos pueden clasificar los polígonos y describir porqué se agrupan de una cierta manera .

El trabajo con el geoplano virtual hace que la exploración sea más fácil a los alumnos que tienen dificultades en el manejo de las gomas. Debido a que los alumnos tiene un área de trabajo más grande pueden hacer una variedad mayor de polígonos. Hay oportunidad de crear múltiples figuras cóncavas y convexas y verlas simultáneamente. El poder rellenar las figuras con colores ayuda a los alumnos más pequeños a observar el número de lados, y puesto que las figuras abiertas no se pueden sombrear, esto ayuda a comprender que los polígonos son figuras cerradas. Como ocurre con los geoplanos concretos, las lineas formadas por las bandas son rectas no curvadas.

Ejercicio 3:

¿De qué otra manera puedes ayudar a los alumnos a aprender las propiedades de los polígonos distinta del uso de los geoplanos?

¿Qué experiencias, conocimientos y vocabulario deberían tener los estudiantes con el fin de desarrollar la comprensión de las propiedades de los cuadriláteros?

Actividad 7: Desafío de propiedades (nivel 1-2)

Esta actividad se puede hacer casi con cualquier material que permita dibujar o construir formas fácilmente. Listar propiedades o relaciones y hacer que los alumnos construyan tantas formas como sea posible que tengan esas propiedades o muestren esas relaciones. Comparar las formas hechas por los diferentes grupos. Estos son algunos ejemplos:

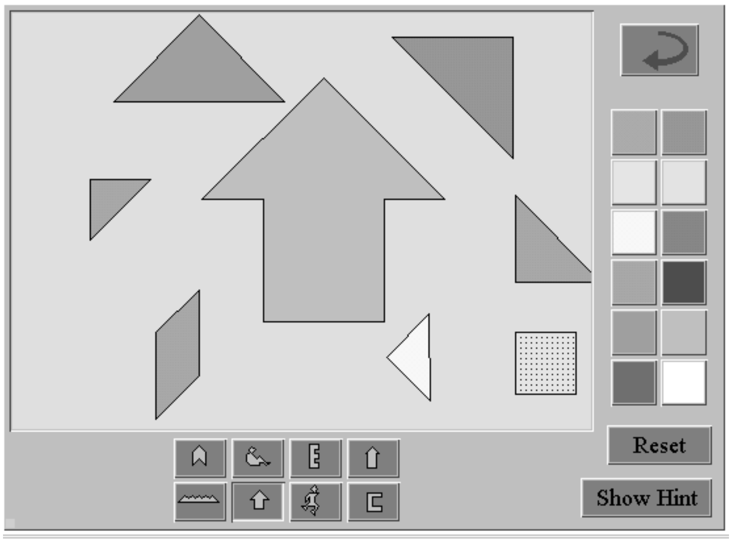
- Hacer una figura de cuatro lados con dos lados paralelos de la misma longitud pero no paralelos.
- Hacer varias figuras de seis lados. Hacer alguna con uno, dos y tres pares de lados paralelos y alguna sin ningún lado paralelo.
- Hacer figuras que tengan esquinas rectangulares. ¿Se puede lograr que tengan tres lados? ¿Y con cuatro, cinco, seis, siete u ocho lados?
- Hacer cinco triángulos diferentes. ¿En qué se diferencia? (Igual para figuras con cuatro, cinco y seis lados)
- Hacer triángulos con dos lados iguales (congruentes)
- Hacer figuras de cuatro lados con tres lados congruentes
- Intentar hacer figuras de cinco lados con cuatro lados que sean iguales
- Hacer cuadriláteros que tengan todos los lados iguales (o con dos pares de lados iguales)
- Hacer una figura con uno o más ejes de simetría, o con simetría rotacional.

A estos desafíos de propiedades se pueden incorporar también otras nociones como perpendicular, medidas de ángulos, área, perímetro, semejanza, concavidad y convexidad, simetría, etc. También se puede pedir que los propios alumnos se planteen otros problemas del mismo tipo que pongan en juego otras propiedades.

3.2.2. Actividades con el Tangram

La descripción de las figuras geométricas planas y la visualización de su aspecto cuando se les aplican transformaciones, como pueden ser rotaciones o simetrías, o bien se componen unas con otras, son aspectos importantes del aprendizaje de la geometría en los primeros niveles educativos. En esta sección describimos el uso de un material didáctico que se conoce como *tangram* que sirve de soporte material (o virtual) para el diseño de experiencias de enseñanza de gran interés. Se trata de un conjunto de siete piezas (un rompecabezas) que permite plantear una gran variedad de problemas y experiencias geométricas. Usaremos el ejemplo electrónico elaborado por el NCTM como parte del documento "Principios y Estándares 2000 para las matemáticas escolares" donde nos ofrecen la posibilidad de trabajar con un "tangram virtual".

En una primera parte los estudiantes pueden elegir una figura y usar las siete piezas para rellenar el contorno. En la segunda parte, "desafíos con el tangram", se propone que los estudiantes usen las piezas del tangram para formar polígonos dados.



Actividad 8
Elige una figura y usa las siete piezas para rellenar el contorno.

Observaciones:

Las experiencias previas de los alumnos con puzzles proporciona una base para realizar esta actividad. Ya que hay puzzles similares disponibles hechos de plástico o de cartulina, los alumnos pueden pasar de las experiencias con material concreto al entorno del ordenador. Después que los alumnos han tenido tiempo de trabajar con los contornos, el profesor puede plantear cuestiones como las siguientes, para provocar la reflexión sobre soluciones diferentes, o para que reflexionen sobre las estrategias que usan para resolver las tareas.

- ¿Puedes rellenar el contorno de otra manera?

- ¿Cuántas formas diferentes hay de rellenar esta figura?
- ¿Qué haces cuando no puedes imaginar una solución?
- Se pueden sustituir algunas piezas del tangram por otras?

¿Qué aprende los alumnos?

Aunque completar estos puzzles u otros similares, bien con material manipulativo o con el ordenador, puede ayudar a los estudiantes a generalizar sus experiencias, el entorno del ordenador es probable que les estimule a pensar sobre cómo necesitan manipular las piezas en lugar de hacerlo principalmente por ensayo y error. El trabajo con un compañero en el ordenador también estimula a los estudiantes a ser más precisos en el uso del vocabulario sobre el espacio. El maestro puede enriquecer el vocabulario de los estudiantes en sus conversaciones con otros estudiantes comentando las acciones que realizan, diciendo por ejemplo, "Veo que estás girando el paralelogramo", o bien "¿Qué diferencia produciría si se volteara la pieza?

Ejercicio 4:

a) ¿Cómo pueden los profesores proporcionar tiempo para que todos los alumnos interactúen con los tangram virtuales?
b) ¿Qué tipo de discusiones sobre el trabajo de los alumnos con las piezas del tangram puede planificar el maestro que pudieran enriquecer la comprensión de los estudiantes sobre las formas y el movimiento en el espacio?

Desafíos con el tangram

Actividad 9:

a) ¿Es posible completar todas las tareas que se describen a continuación? Intenta resolver estos desafíos con el tangram virtural:

- Construye un cuadrado usando sólo una pieza del tangram
- Ídem usando dos, tres, cuatro, cinco, seis y las siete piezas del tangram.

b) ¿Cuáles de las siguientes figuras puedes hacer usando las siete piezas del trangram?

- Un trapezoide
- Un rectángulo que no sea un cuadrado
- Un paralelogramo que no sea un cuadrado
- Un triángulo

El trabajo en la clase

Muchos estudiantes encontrarán estas tareas muy interesantes pero difíciles. Los alumnos están aprendiendo sobre las posiciones de las figuras en el espacio, así como nuevo vocabulario y las propiedades de las figuras. El tangram virtual puede ayudar a que los estudiantes sean más conscientes de las propiedades de las figuras y de los procesos que usan al manipular las formas ya que deben planificar los movimientos que necesitan realizar. Los profesores pueden animar a los estudiantes a planificar sus acciones si tienen que trabajar con un compañero y hablar entre ellos de las acciones que tienen que realizar. Por ejemplo, los estudiantes tienen que imaginar explícitamente cómo colocar las piezas del tangram, unas respecto de otras, en las actividades en las que no hay un contorno que rellenar. Las herramientas incorporadas en el tangram virtual que permiten realizar giros y simetrías son también un buen recurso para que los estudiantes vean los movimientos geométricos.

Estos desafíos con el tangram se pueden hacer más fáciles dando contornos a los alumnos para que los usen en sus pupitres, de manera que puedan experimentar con el ajuste de las siete piezas del tangram en los contornos propuestos.

Evaluación mediante observaciones y conversaciones

Las actividades descritas con el tangram pueden servir como vehículos para evaluar el pensamiento de los estudiantes. Al observar y hablar con los estudiantes, el profesor puede tener en cuenta cuestiones como las siguientes:

- ¿Tienen facilidad los estudiantes para manipular las formas?
- ¿Qué vocabulario usan los estudiantes cuando hablan unos con otros?
- ¿Reconocen los estudiantes la congruencia y las relaciones entre combinaciones de formas?
- ¿Utilizan los estudiantes lo que han aprendido en tareas previas de resolución de problemas?

Ejercicio 5

a) ¿Cómo podría facilitar el aprendizaje de los niños con necesidades especiales el trabajo con manipulativos basados en el ordenador?

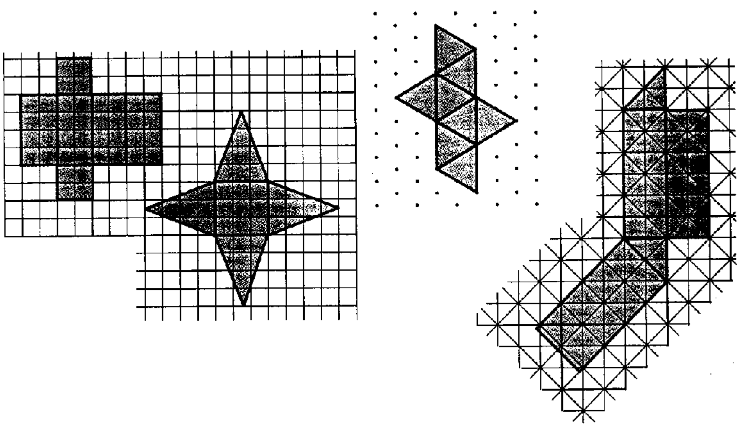
b)¿Qué actividades adicionales podrían diseñar los profesores para centrar la atención de los estudiantes en las relaciones entre las piezas del tangram?

3.4. Construcción y exploración de sólidos

La construcción de formas tridimensionales presenta un poco de más dificultad que las formas bidimensionales pero posiblemente sea una actividad más importante. Construir un modelo de una forma tridimensional es una manera informal de lograr la comprensión de la forma de una manera intuitiva en términos de sus partes componentes.

Actividad 10: Desarrollo de sólidos (nivel 0)

Hacer que los alumnos dibujen desarrollos de diversos sólidos. Sobre papel cuadriculado con una retícula de 1cm de lado se pueden trazar líneas paralelas y ángulos sin tener que hacer mediciones. Conos circulares se pueden hacer fácilmente recortando un sector de un círculo. Experimentar con círculos de tamaños diferentes y diferentes sectores. El valor principal de la construcción de sólidos a partir de sus desarrollos está en la identificaicón de la forma de las caras y dónde se deben conectar las caras.



Los sólidos se pueden también construir usando otras piezas más simples como pueden ser cubos de madera o de plástico.

Actividad 11: Cajas de bloques

¿Cuántos sólidos rectangulares (ortoedros) diferentes se pueden construir usando 12 cubos para cada uno de ellos? (Un sólido rectangular tiene seis caras, y cada cara es un rectángulo). Probar con otro número de cubos. ¿Cuándo son congruentes (exactamente los mismos) dos sólidos rectangulares? ¿Cómo tendrías que girar un sólido para ponerlo en la misma orientación que otro que tiene la misma forma?

Actividad 12: Generación de sólidos (nivel 1)

1. Dar a los alumnos una figura recortada en cartulina. La tarea consiste en describir, dibujar o construir con plastilina (u otro material) todos los sólidos que se puedan generar a partir de esa forma. La figura se puede girar o trasladar de cualquier manera. ¿Se pueden generar algunas figuras de más de una manera?

2. Dar a los alumnos un modelo de un sólido, o describirlo oralmente. Los alumnos tienen que dibujar y recortar una o más formas que generen dicho sólido y describir como se haría la generación.

¿Qué sólidos no se pueden generar de esta manera? ¿Qué se puede decir sobre un sólido que se ha generado mediante deslizamientos? ¿Cómo se pueden generar los cilindros? ¿Y los primas? ¿Qué tipos de conos se pueden generar y cómo?

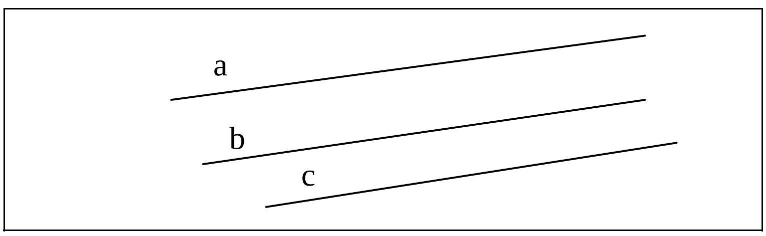
3.5. Geometría dinámica (Logo y Cabrí)

Si se dispone en la escuela de un aula con ordenadores es posible utilizar programas comerciales disponibles para el estudio de la geometría. Entre estos programas podemos citar el Cabri y el módulo de la "geometría de la tortuga" del lenguaje de programación Logo (Godino y Batanero, 1985).

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Incluimos en esta sección una colección de items usados en diversas investigaciones para evaluar los conocimientos geométricos de los niños, indicando algunas de las respuestas erróneas encontradas, o los índices de dificultades.

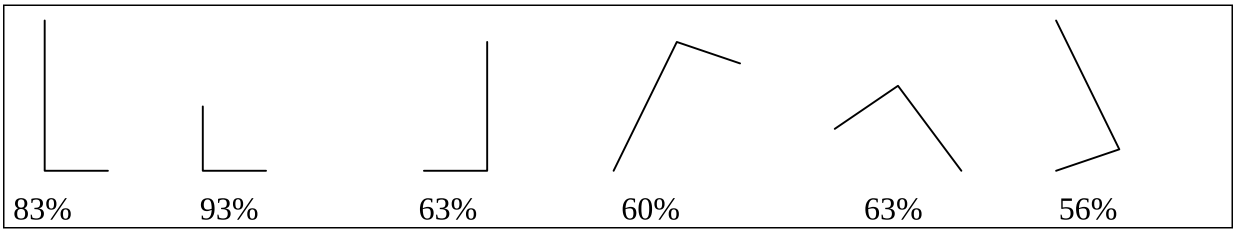
1. La recta *a* es paralela a *b*, y la *b* es paralela a *c*. ¿Es cierto que *a* será paralela a *c*?



Respuesta:

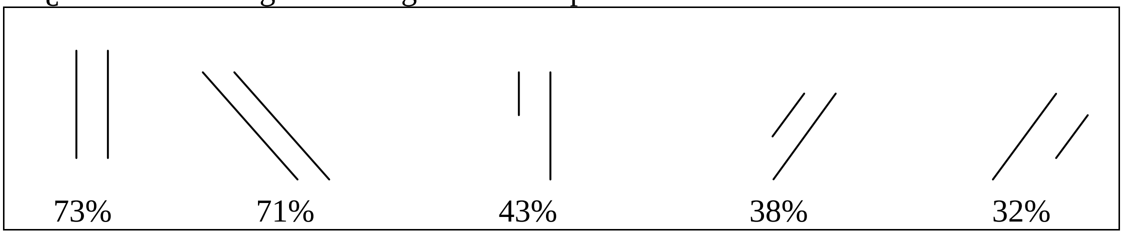
“No, porque b está en medio”

2. ¿Cuáles de las siguientes figuras son ángulos rectos?



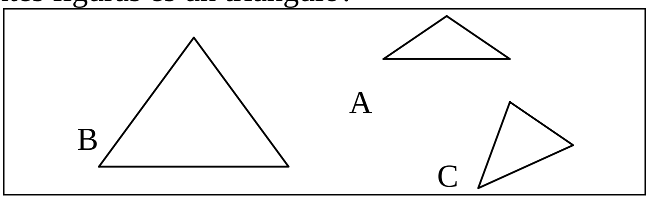
Respuestas[1] :
Los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales figuras son ángulos rectos. Vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados como lados.

3. ¿Cuáles de los siguientes segmentos son paralelos?



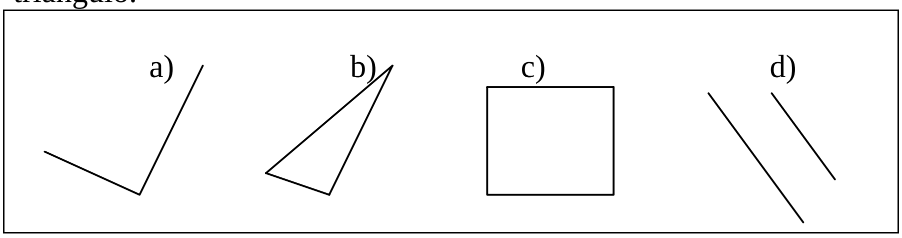
Respuestas[1]:
Los porcentajes indicados corresponden a las respuestas dadas por niños de 10 años afirmando que tales rectas son paralelas. Vemos cómo cambian los porcentajes de éxito según la orientación de la figura y el tamaño de los segmentos trazados.

4. ¿Cuál de las siguientes figuras es un triángulo?



Respuesta:
“C no es un triángulo, porque se ha caido”

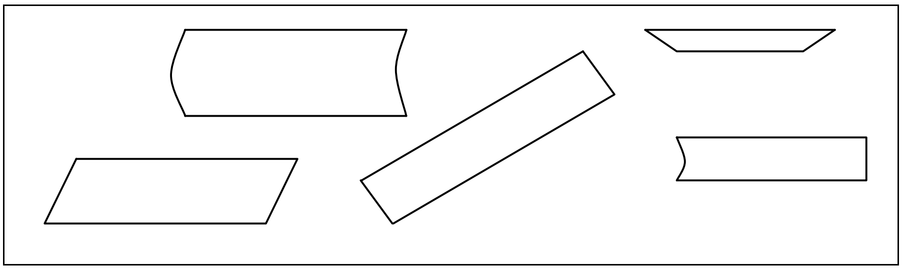
5. Señala entre las siguientes figuras, 1) La que sean un cuadrado; 2) La que sean un triángulo.



Repuestas[4] :

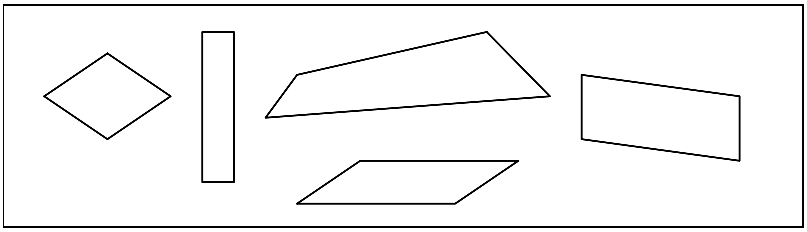
Edad	Porcentaje que reconoció que c) es un cuadrado
5 años 6 “ 7 “	54 56 50
	Porcentaje que reconoción que b) es un triángulo
5 años 6 “ 7 “ 8 “ 9 “ 10 “	38 47 24 65 50 67

6. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rectángulos



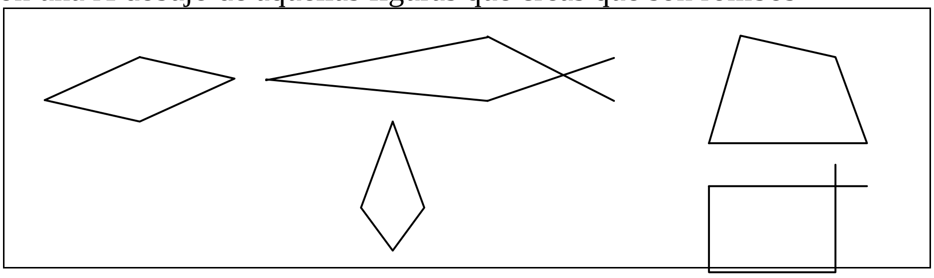
Respuestas[5]:
En una muestra de 423 alumnos de 6º curso el 53% dieron una respuesta errónea a este ítem.

7. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rectángulos



Respuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 55%.

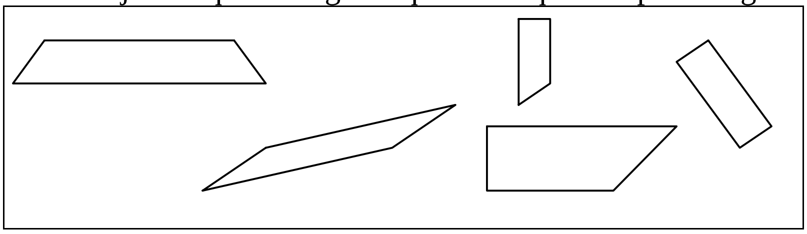
8. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son rombos



[4] Dickson, Brown y Gibson (1991), p. 40.
[5] Contreras (1994)

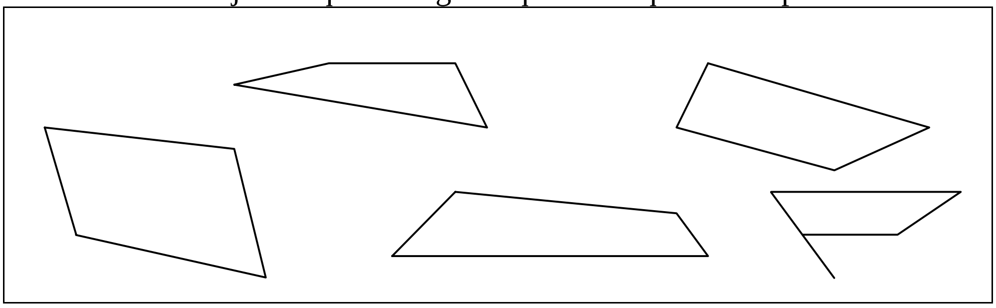
Respuestas[5]:
Porcentanje de respuestas incorrectas del 44%.

9. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son paralelogramos:



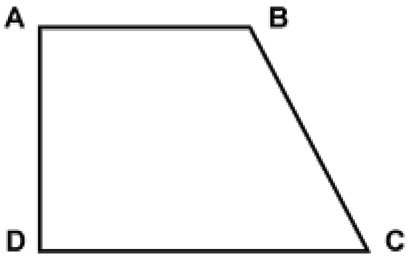
Repuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 80%.

10. Marca con una X debajo de aquellas figuras que creas que son trapecios:



Respuestas[5]:
Porcentaje de respuestas incorrectas del 86%.

11.
En el trapecio ABCD dos de sus ángulos son rectos y un tercer ángulo mide 54°. ¿Cuánto mide el ángulo desconocido?



36° A
27° B
45° C
126° D*

Esta pregunta tuvo un 46% de aciertos en la evaluación de la Educación Primaria realizada en 1995 por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) a alumnos de 12 años. (http://www.ince.mec.es/prim/index.htm).

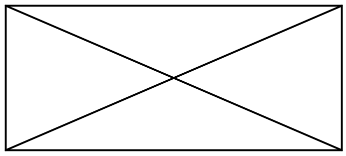
12. Visualizar cómo será una figura en tres dimensiones girada ha resultado sencillo. El 68% de alumnos de 13 años (en la evaluación TIMSS, España[6]) respondieron correctamente a la siguiente pregunta:

[6] http://www.ince.mec.es/pub/pubintn.htm#ref01

5. TALLER DE DIDÁCTICA: ANÁLISIS DE SITUACIONES ESCOLARES

5.1. Respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación [7]

Un maestro propone a sus alumnos las dos preguntas siguientes en una prueba de evaluación.
Pregunta 1:
Escribe una descripción que permita a cualquier persona reproducir exactamente esta figura sin haberla visto antes:



Pregunta 2:
Imagina que has faltado a la última clase de matemáticas. Tu compañera Carolina te describe por teléfono una figura geométrica: "Traza con lápiz un círculo de 4 cm de radio. Dibuja con lápiz 2 diámetros perpendiculares. Los extremos de estos diámetros son 4 puntos del círculo. Traza con tinta los segmentos que unen los puntos y que no pasan por el centro del círculo".

a) Dibuja la figura; b) ¿Cómo se llama la figura trazada con tinta?

Cuestiones para el futuro maestro:
Pregunta 1:
1. Responde a la pregunta
2. ¿Cómo pueden interpretar los alumnos la palabra "exactamente" utilizada en la pregunta?
3. El maestro espera que los alumnos utilicen en sus descripciones al menos dos términos del vocabulario geométrico. ¿Cuáles son esos términos según tu opinión?
4. ¿Sobre qué puntos se centrará vuestra evaluación de la respuesta de un alumno que no utilice ninguno de estos términos?
5. Caracterizar las competencias requeridas para realizar correctamente este test.

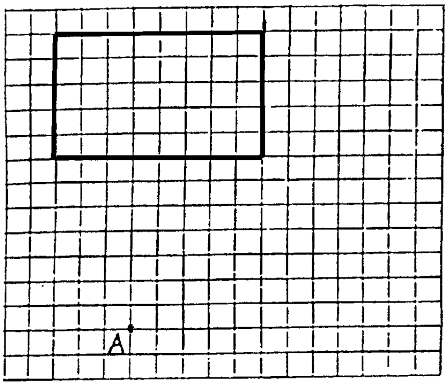
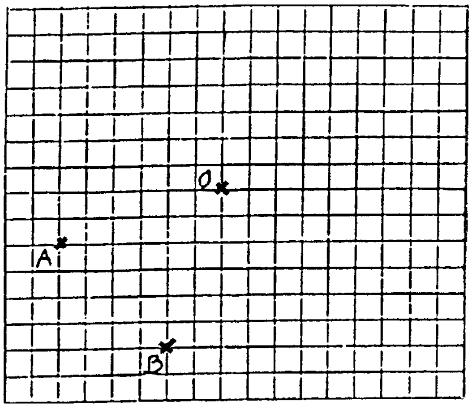
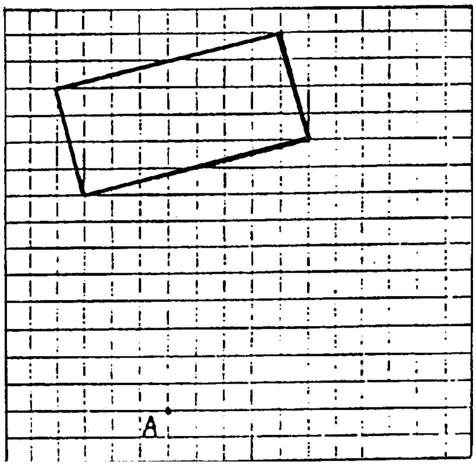
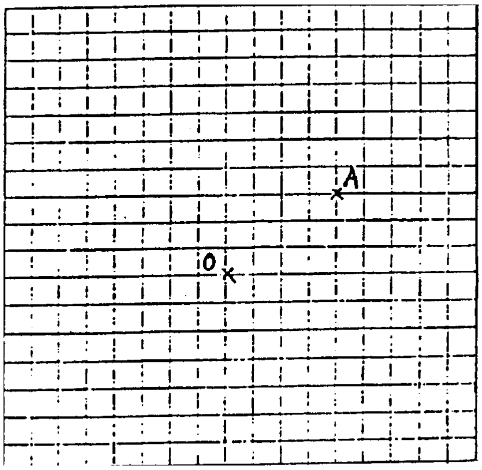
Pregunta 2:
1. Responde a la pregunta
2. ¿Cuáles son los elementos de apreciación del maestro para la parte a) ¿Qué piensas si el maestro utiliza un calco para la corrección?
3. Para la parte b) se puede prever que algunos alumnos respondan "rombo". ¿Por qué? ¿Cómo reaccionarías a estas respuestas?
4. Comparar las competencias requeridas para realizar correctamente este pregunta con las de la pregunta 1.

5.2. Análisis de actividades escolares [7]

5.2.1. Construcción de un rectángulo
Un maestro propone a sus alumnos de 6º curso la actividad descrita en el documento adjunto, en la que se pide dibujar distintos rectángulos.
1. Para cada uno de los seis ejercicios, describir un procedimiento de resolución en el cual un alumno podría pensar. Indicar para cada procedimiento las ideas geométricas sobre las cuales se apoya y los instrumentos utilizados.

[7] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

2. ¿Cuáles son las variables didácticas que intervienen en los diferentes ejercicios? ¿En qué sentido orientan la actividad de los alumnos?
3. El maestro considera este documento como un instrumento de evaluación. ¿Cómo puede explotar esta prueba si no es considerada como una evaluación final (de tipo sumativo)?

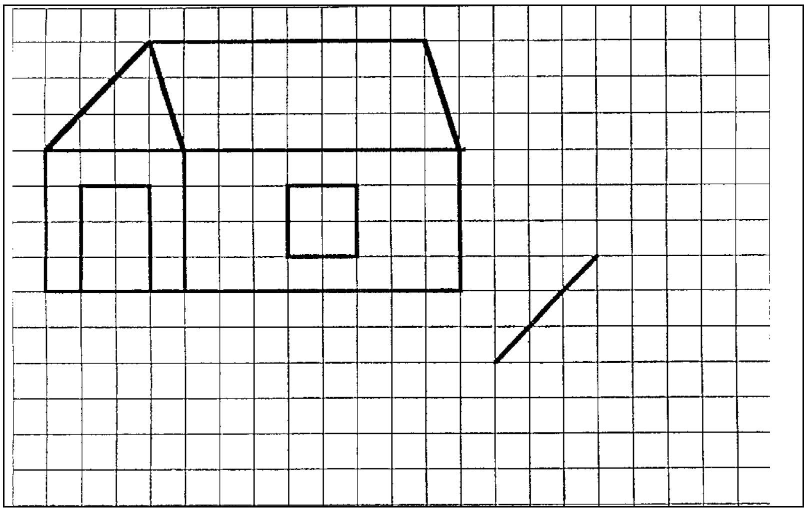
1) Reproduce el rectánculo colocando un vértice en A 	4) Termina de dibujar un rectánculo ABCD con centro en O 
2) Reproduce el rectánculo colocando un vértice en A 	5) Construye un rectángulo de vértice A y centro O 
3) Construye un rectángulo con vértice en A A X	6) Construye un rectángulo de centro O O X

5.2.2. *Construcciones geométricas*

El ejercicio adjunto tiene por consigna: "Reproduce la casa; ya se ha comenzado a dibujar un trazo". Responde a las siguientes cuestiones:

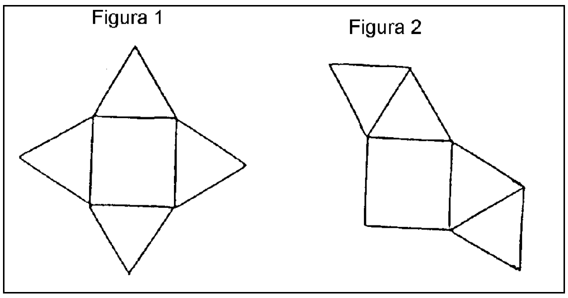
1. ¿En qué ciclo de la primaria situarías este ejercicio? Justifica la respuesta.

2. ¿Cuáles son los conocimientos y destrezas necesarias para realizar con éxito este ejercicio?
3. Si tuvieras que utilizar este ejercicio con tus alumnos,
   a) ¿Qué medios de control pondrías al alcance de los niños?
   b) ¿Qué clase de ayuda darías a los niños con dificultades?
   c) ¿Cómo utilizarías las producciones de los niños, o sea, qué destacarías en el momento de la síntesis de la secuencia?
4. ¿Qué ampliaciones podrías proponer a este ejercicio?
5. La casa se dibuja sobre papel blanco (no cuadriculado). La consigna del ejercicio es: "Reproduce la casa con la ayuda de un compás, una regla no graduada y una escuadra".
   a) Realiza el ejercicio. Indicar las principales etapas de su construcción.
   b) ¿Qué conocimientos y destrezas son necesarias para poder realizar este ejercicio?
   c) ¿En qué ciclo de la escuela situarías este ejercicio? Justifica la respuesta.



5.2.3. *Multiplicidad de patrones de un sólido*

Para lograr que los niños tomen conciencia de la multiplicidad de patrones (desarrollos) que pueden permitir la construcción de un sólido se les puede proponer el siguiente problema: Se elige como sólido la pirámide regular de base cuadrada, es decir formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros, y se pide realizar el mayor número posible de patrones. A título de ejemplo, las figuras 1 y 2 representan dos patrones de dicha pirámide:



1. Representar mediante un esquema a mano alzada otros tres patrones de la pirámide de base cuadrada.
2. Describir cómo organizar esta situación de investigación en una clase de primaria. Sugerimos tener en cuenta la siguiente secuencia:
   a) Presentar el desarrollo general, indicando las diferentes fases y sus características.

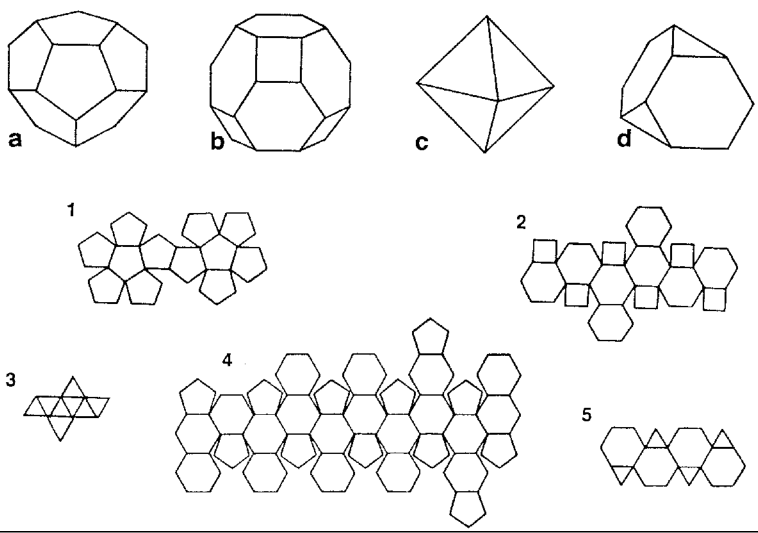
   b) Para cada fase indicar la organización de la clase, el material puesto a disposición de los alumnos (en particular el que permita dibujar rápidamente las figuras) así como las consignas dadas.
   c) Explicitar los conocimientos utilizados en esta actividad que deberán ser objeto de institucionalización.
3. Explica si consideras que la actividad desarrollada reune las características de una "situación-problema".

5.2.4. *Caracterización de un patrón*

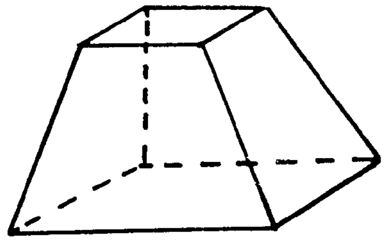
1. Analizar el ejercicio propuesto en el documento 1 adjunto.
   a) Explicar apoyándote en ejemplos por qué se puede resolver el ejercicio sin tener una comprensión de lo que es un patrón.
   b) Tratar de comprender las estrategias que podría utilizar a priori un niño para responder a esta cuestión.
2. Analizar el ejercicio propuesto en el documento nº 2
   a) ¿Cuáles son los dibujos que no son patrones?
   b) ¿Qué consignas suplementarias se pueden proponer para verificar que los niños son capaces de poder justificar la obtención, o no, de la caja, a partir de las figuras propuestas, sin hacer el recorte de la figura.
3. Balance comparativo de los objetivos de los dos ejercicios.
   Para cada uno de los dos ejercicios, entre las propiedades de un sólido que permiten caracterizarlo, indicar:
   a) aquellas que basta identificar para responder a la consigna,
   b) la que es imposible confrontar para las dos representaciones dadas (perspectiva y patrón).
   c) aquellas propiedades que, aunque aparezcan en las dos representaciones, no son utilizadas en la resolución del ejercicio.

DOCUMENTO 1

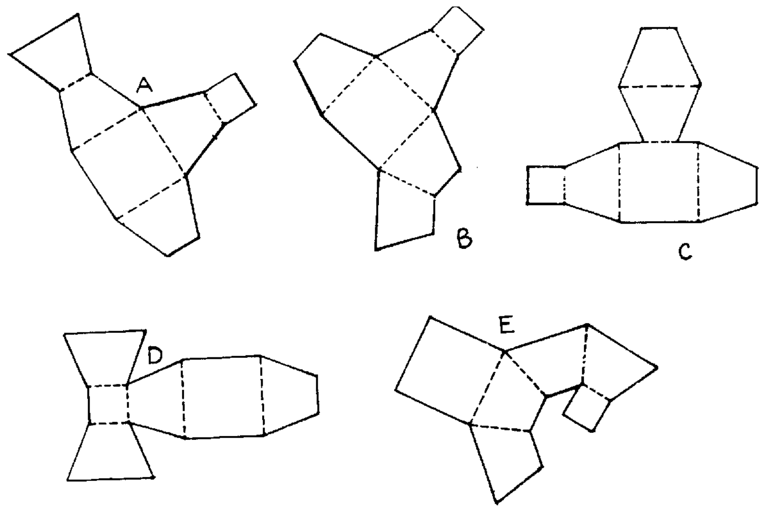
Se han representado 4 poliedros y 5 patrones de poliedros. Relacionar mediante una flecha cada poliedro con el patrón correspondiente.



DOCUMENTO 2
Se quiere construir una caja como la que se representa a continuación:



Aquí debajo se muestran figuras recortables algunas de las cuales permiten construir la caja propuesta. Señala las que efectivamente permiten hacer la construcción.

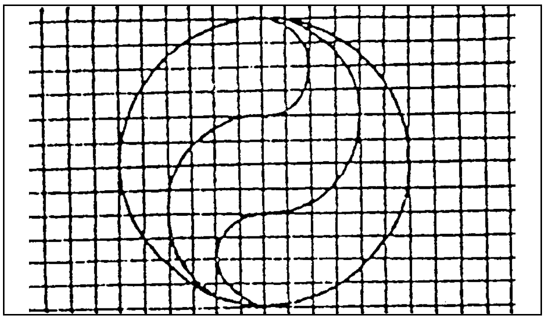


5.3. Análisis de materiales didácticos

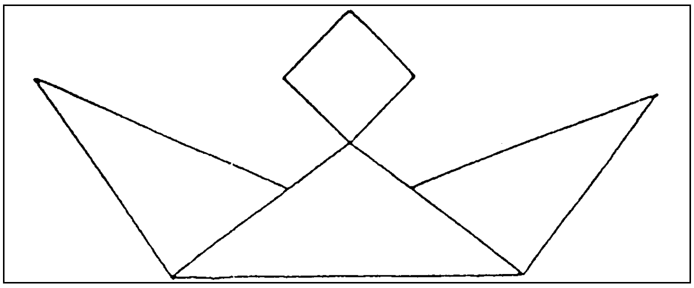
La cuadrícula como instrumento geométrico[8]

1. El papel cuadriculado se considera como un "instrumento" en geometría. ¿Por qué? ¿Cuáles son los restantes instrumentos en el estudio de la geometría?
2. ¿En qué se diferencia la geometría sobre 'papel blanco' respecto de la geometría en papel cuadriculado?
3. Estos son dos ejercicios de un libro de primaria:
   a) Observa esta figura y reprodúcela sobre papel cuadriculado:

[8] Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.



b) Oserva esta figura y reprodúcela sobre papel blanco:



¿Qué competencias (conocimientos y destrezas) debe poseer el niño para resolver cada uno de estos dos ejercicios?
¿Por qué se ha utilizado papel blanco o cuadriculado en cada caso?

5.4. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "Figuras geométricas" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos de primaria.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués y Fortuny, J. M. (1987). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Cañizares, M. J. (2001) Elementos geométricos y formas espaciales. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 401-426). Madrid: Síntesis

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1985). *Microordenadores en la escuela*. Madrid: Rama.

Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid: Síntesis.

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Serrano, L. (2001). Elementos geométricos y formas planas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 379-400*)*. Madrid: Síntesis

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

IV.

Didáctica de la Geometría para Maestros

Capítulo 2:

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SIMETRÍA Y SEMEJANZA

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

Las orientaciones curriculares del MEC (DCB) para la educación primaria incluyen en el bloque 4, "Las formas en el espacio", dentro del apartado de "procedimientos", las siguientes indicaciones:

6. Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos.
7. Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado (puntos y ejes de simetría).

Los Principios y Estándares 2000 del NCTM proponen que los programas de enseñanza de matemáticas para los niveles de educación infantil y primaria incluyan el logro del objetivo general: *"Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas"*. Este objetivo se concreta para los niveles de infantil a 2º curso:

- reconocer y aplicar traslaciones, giros y simetrías;
- reconocer y crear formas que tengan simetría.

Para los niveles 3º a 5º se amplian de la siguiente manera:

- predecir y describir los resultados de deslizar, voltear y girar formas bidimensionales;
- describir un movimiento o una serie de movimientos que muestren que dos formas son congruentes;
- identificar y describir las simetrías en formas y figuras bidimensionales o planas y tridimensionales.

Ejercicio:
Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de las transformaciones geométricas, la simetría y la semejanza en:
- Diseño Curricular Base (MEC)
- Orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

De acuerdo con Dickson, Brown y Gibson (1991), el estudio de las transformaciones de las figuras geométricas ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría basada en teoremas y demostraciones deductivas. Al parecer, su principal valor reside, para la mayoría de los niños, en el estudio de ciertas transformaciones por el valor intrínseco de éstas, no tanto porque contribuyan a proporcionar una imagen unificada de las matemáticas. El estudio de las transformaciones se puede basar en acciones fáciles de realizar (por medio de plegados y giros), por lo que pueden servir para generar descubrimientos relativos a las transformaciones y para comprobar las predicciones e inferencias de los niños. También contribuye a resaltar aspectos más tradicionales de la geometría, como la congruencia y la semejanza.

La comprensión por los niños de distintas edades de las traslaciones, giros y simetrías ha sido evaluada en distintas investigaciones. Thomas[1] propuso el siguiente test clásico de conservación de la longitud de segmentos a un grupo de 30 niños, 10 de cada una de las edades 6, 9, y 12 años:

[1] Citado por Disckon et al. (1991, p. 65)

Se presentan dos varillas de la misma longitud:

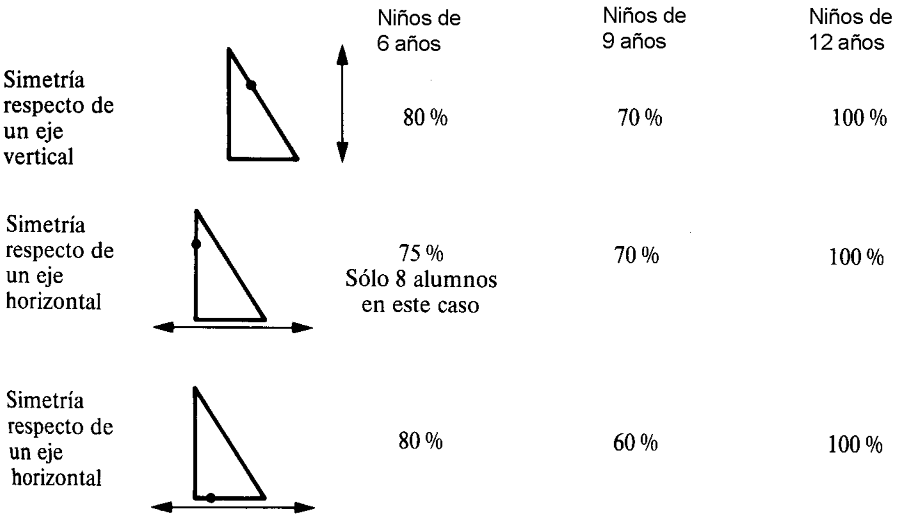
Seguidamente se desplaza una de las varillas:

se pregunta al niño si son de la misma longitud, o si una es más larga o más corta que la otra.

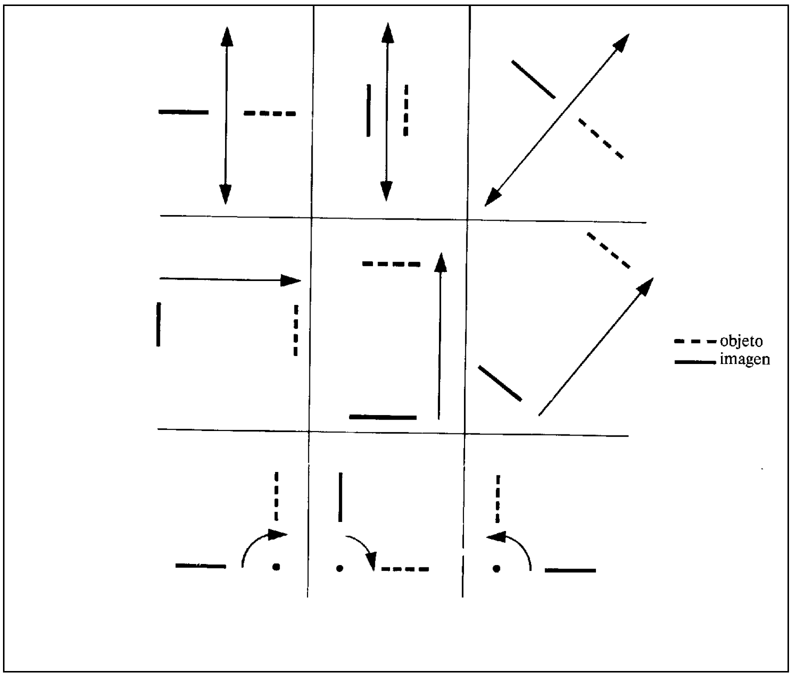
Los resultados de Thomas para esta experiencia indicaron que a la edad de 6 años, 8 de cada 10 niños no tienen sentido de conservación de la longitud ante la traslación, a la edad de 9 años son 7 de cada 10 y a la de 12 todos los niños comprendían la invariancia de los segmentos.

Esta misma autora propuso a los niños tareas relativas a la transformación de un triángulo al aplicarle traslaciones, giros y simetrías. Los niños tenían que comparar la longitud de un lado del triángulo antes y después de cada movimiento, diciendo si era “más corto”, “más largo” o “igual” que antes. Casi todos los alumnos de Thomas consideraron que la longitud permanecía invariante en las rotaciones y en las simetrías, pero en el caso de la traslación, los niños con un sentido insuficiente de la conservación opinaron que las longitudes de los lados de la figura geométrica cambiaban.

Otra serie de tareas usadas por Thomas estaban dirigidas a descubrir si los niños comprendían que un punto particular del lado de un triángulo conservaría la misma posición sobre ese mismo lado al seguir cierta transformación de la figura. Practicamente todos los alumnos de 12 años sitúan el punto en la posición correcta, pero los de 6 y 9 años tienen importantes dificultades. Cuando se le da al triángulo un giro de 90º en sentido horario, el 60% de los niños de 6 años y el 50% de los de 9 años fallan. Para las preguntas sobre el efecto de la simetría los resultados se indican en la tabla adjunta:



Otro investigador que ha estudiado el desarrollo de la comprensión de los movimientos por niños de edades entre ocho, nueve y diez años ha sido Kidder[2]. Propuso a los niños el test clásico de conservación de longitudes, proporcionándoles definiciones operativas de las traslaciones, simetrías y giros. En las pruebas se utilizaron listores de unos 10 centímetros de longitud y flechas hechas con alambres para indicar los diversos movimientos. El listón se situaba frente al niño, junto con la flecha de alambre. Se le superponía al listón original otro idéntico, y se le mostrata al niño la transformación deseada realizándola sobre el listón de encima, dejando fijo el original. Cada movimiento se repetía varias veces y a continuación lo hacía el niño por sí solo. La figura adjunta muestra los movimientos enseñados.



[2] Citado por Dickson et. al. (1991).

Los niños que tuvieron éxito en la ejecución de estas transformaciones pasaron a integrar el grupo de 20 de cada edad, los cuales prosiguieron con la segunda fase del estudio, realizando el test sobre las transformaciones. Se trataba de ver si reconocían la invariancia de la longitud del listón tras la aplicación de los movimientos. Con dicho fin se utilizaba un listón objeto, un movimiento indicado (similar a los mostrados en la figura) y otros cinco listones, de los cuales solamente uno tenía la misma longitud que el listón objeto. Se le pedía al niño que utilizase uno de los listones para que mostrase qué aspecto tendría una vez efectuado el movimiento indicado. Se le dijo a cada niño que podía medir si lo deseaba, con el fin de que supiera claramente que le estaba permitido comparar los listones. Se animó a cada uno de los niños a que explicase sus accciones.

Los resultados indicaron (sorprendentemente, en vista de lo asegurado por Piaget) que solamente un 31% reconocieron la conservación de longitud en el sentido clásico durante la etapa inicial de la investigación; concretamente tuvieron éxito el 40% de los niños de ocho años, 55% de los niños de 9 años y 60% de los de 10. Sin embargo, cuando se aplicó el test de las transformaciones, solamente el 23% de los niños con sentido de conservación clásico eligieron coherentemente el listón imagen de longitud correcta correspondiente a la traslación. Entre las conclusiones de Kidder está que la conservación de longitud en sentido clásico piagetiano no es suficiente para garantizar tal conservación en operaciones mentales más complejas.

Remitimos al lector al libro citado de Dickon et. al. (1991) para un estudio más completo de este apartado sobre desarrollo de la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas por los niños.

3. SITUACIONES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

Algunas propiedades de las formas geométricas merecen una atención especial, como son las que corresponden a la simetría y la semejanza. Las actividades que se pueden proponer para investigar este tipo de propiedades geométricas pueden requerir diversos niveles de desarrollo del pensamiento geométrico por parte de los estudiantes, aunque en la mayor parte de estas actividades se pone en juego el nivel 1 o superior. Los alumnos que estén en el nivel 0 pueden ser capaces, no obstante, de trabajar con ellas aunque puede que no apliquen estas propiedades a clases completas de formas geométricas. Los alumnos que estén en el comienzo del nivel 2 pueden ser puestos en situación de ver cómo se relacionan las propiedades o qué condiciones dan lugar a propiedades particulares.

3.1. Juegos de psicomotricidad

Las situaciones de juego de psicomotricidad parecen muy recomendables para iniciar el estudio de distintos aspectos de la geometría, y de manera especial en el caso de los movimientos. En el libro de A. Martínez y F. Juan (1989) encontramos abundantes ejemplos de este tipo de situaciones, así como los fundamentos metodológicos en los que basan su propuesta curricular. Describimos, a continuación dos situaciones de este tipo, una para familiarizar a los alumnos de segundo ciclo de primaria sobre los giros y otra sobre las simetrías. En ambos casos se supone que los niños tienen posibilidad de moverse con libertad por una sala de dimensiones adecuadas en la que hay colocado al menos un espejo grande.

Actividad 1: Psicomotricidad y apreciación del giro

- Nos movemos libremente por el espacio
- Nos movemos dando vueltas sobre nosotros mismos, girando (hay que cambiar el sentido de giro para evitar mareos). Seguir girando pero en el suelo.
- Nos ponemos por parejas y buscamos diferentes formas de girar juntos. Buscamos giros que impliquen un desplazamiento y giros sin desplazamiento
- Nos movemos por grupos y buscamos distintas formas de girar juntos. Buscamos giros con desplazamientos y giros sin desplazamientos.
- Nos juntamos todos y buscamos distintas formas de girar juntos, con desplazamiento o sin desplazamiento.
- Buscamos objetos de la clase que puedan girar y jugamos con ellos, con su giro.
- Buscamos objetos de la clase que puedan girar y donde quepamos dentro nosotros, para girar con ellos (se procurará que haya neumáticos viejos, cestas de mimbre, cajas cilíndricas, etc.)

Actividad 2: Psicomotricidad y simetrías

- Nos movemos libremente por el espacio al ritmo de una música.
- Nos colocamos delante de un espejo grande (que habrá en clase), nos seguimos moviendo por el espacio y nos vemos en el espejo. Nos alejamos y acercamos al espejo, movemos una mano y la otra, etc.
- Por parejas jugamos a los juegos de imitación. Uno se pone delante y se mueve como quiere. El otro se pone detrás e imita su movimiento. Después se intercambian las posiciones.
- Seguimos por parejas jugando a los juegos de imitación, pero ahora al "juego de los espejos". Al igual que antes, uno imita el movimiento de otro, pero ambos se ponen frente a frente, de manera que el que imita hace las veces de imagen reflejada por un espejo.
- Se reparten varillas de madera. Seguimos jugando al espejo, pero ahora intervienen también los palos.
- Nos ponemos por grupos. Unos hacen de figura y los otros de figura imagen. Hacemos las figuras con nuestros cuerpos y con los palos.
- Continuando con el ejercicio anterior, la figura original se hace con los palos en el suelo. Se coloca una cuerda en el suelo (haciendo las veces de espejo), separando la figura original de su "imagen reflejada".
- Análogo al anterior, pero por parejas y con palos pequeños.

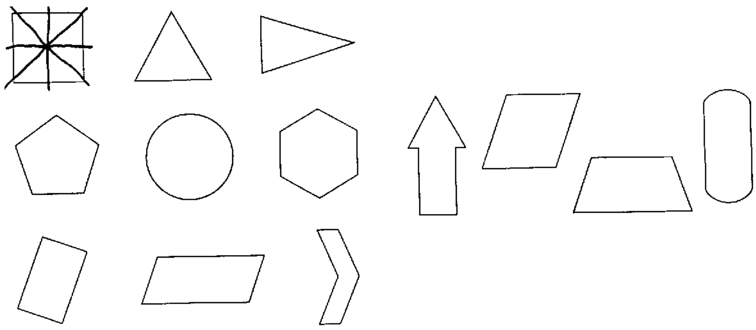
Remitimos al lector al libro citado de Martínez y Juan (1991, p. 102-103) para encontrar una rica colección de actividades complementarias de exploración de las transformaciones geométricas en la clase de matemáticas.

3.2. Simetría axial

Es importante que los niños vean la simetría en los objetos que les rodean; es conveniente poner en el tablón de clase dibujos o fotografías de objetos que tengan simetrías, y que los niños dibujen o construyan formas simétricas. Una manera sencilla de hacerlo puede ser doblando una hoja de papel y haciendo diversos recortes de los bordes: al desdoblar la hoja se obtendrán figuras con eje de simetría por el doblez inicial.

Actividad 3:

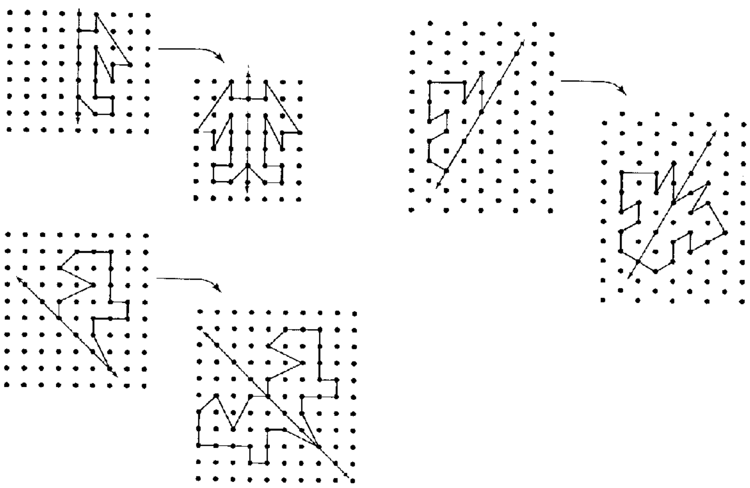
Dibujar los ejes de simetría de cada una de estas figuras. Trazar las figuras sobre una hoja y comprobar mediante doblado las respuestas.

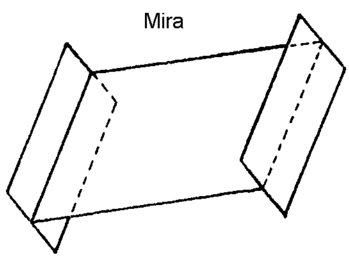


Incluimos a continuación algunos tipos de actividades y materiales que se pueden proponer para el estudio de las propiedades de simetría de las figuras.

Actividad 4: Simetría usando la cuadrícula de puntos

Sobre un geoplano, o usando papel cuadridulado, trazar una recta. Trazar una figura a uno de los lados de dicha recta y que alguno de sus lados toque a la recta. Dibujar la imagen simétrica de la figura tomando como eje de simetría la recta trazada. Comprobar el resultado con un espejo situado sobre el eje. Comprobar también el resultado doblando el papel por el eje de simetría

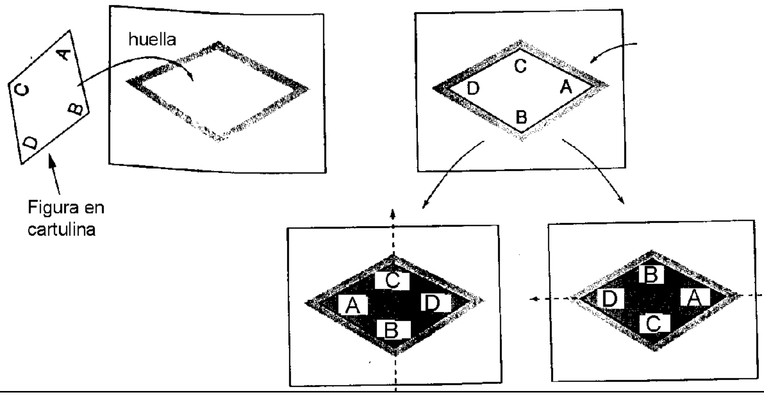




Un dispositivo útil para el estudio de las simetrías y las transformaciones es una pieza de metacrilato transparente de color rojo conocida como “mira”, de forma rectangular y con unas dimensiones que suelen estar alrededor de los 9 x 15 cm². Uno de los bordes de 15 cm. está biselado, de modo que presente una línea de contacto con el papel, sobre el que posteriormente se apoyará, lo más fina posible. Dicha pieza rectangular se mantiene completamente vertical sobre el plano del papel mediante dos piezas laterales, que pueden ser del mismo material o de madera. Al colocar la mira sobre un eje de simetría de una figura se reflejará sobre el metracrilato, de manera visible, la otra mitad simétrica de la figura.

Actividad 5 (movimientos sobre la huella):

Recortar en cartulina una forma poligonal, por ejemplo un rombo, como se muestra en la figura adjunta. Identificar los vértices con letras por ambas caras, de manera que se ponga la misma letra en cada vértice en las dos caras en que se puede mostrar. Sobre una hoja de papel trazar el contorno de la figura; obtenemos lo que podemos denominar la "huella" de la figura sobre la hoja. ¿De cuántas manera diferentes se puede mover la pieza de tal manera que tras el movimiento vuelva a coincidir con la huella? Se supone que en los movimientos la pieza puede levantarse del plano.
Los alumnos pueden descubrir que para una forma plana hay tantas líneas de simetría como maneras diferentes se pueda mover la figura de manera que vuelva a coincidir con su "huella".



3.3. Simetría rotacional

Una de las introducciones más sencillas de la simetría rotacional es usando las huellas de figuras trazadas como se ha hecho en la actividad anterior. Si una figura se ajusta a su huella de más de una manera sin que se levante del plano (sin voltearla) tiene simetría rotacional. El número de maneras diferentes en que una figura se puede hacer coincidir consigo misma es el orden de la simetría rotacional. Un cuadrado tiene simetría rotacional de orden cuatro y un paralelogramo con los lados y ángulos desiguales tiene una simetria de orden 2, pero ningún eje de simetría.

Actividad 6: Construcción de formas girables

Usar teselas, geoplanos, o papel cuadriculado para dibujar una forma que tenga simetría rotacional de un orden dado. Excepto para los polígonos regulares esta actividad puede suponer un cierto desafío. Para probar el resultado, trazar la huella de la forma sobre un papel y recortarla en cartulina. Rotar la figura buscando los casos en que coincida con la huella.

3.4. Simetría de figuras tridimensionales

Actividad 7: Simetría plana en construcciones de cuerpos

Usando cubos encajables hacer construcciones que tengan un plano de simetría. Si el plano de simetría pasa entre los cubos, separar el cuerpo en las dos partes simétricas. Tratar de hacer construcciones con dos o más planos de simetría.

3.5. Figuras semejantes

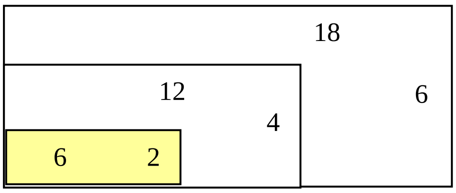
Tanto en dos como en tres dimensiones dos figuras pueden tener la misma forma pero dimensiones diferentes. En el nivel 0 de razonamiento el concepto de "semejanza" es estrictamente visual y posiblemente no será preciso. En el nivel 1, los alumnos pueden comenzar a hacer medidas de ángulos, longitudes de lados, calcular áreas y volúmenes (de los sólidos) que sean semejantes. De esta manera se pueden encontrar relaciones entre formas semejantes. Por ejemplo, los alumnos pueden encontrar que todos los ángulos que se corresponden deben ser congruentes, pero que otras medidas varían de manera proporcional. Si un lado de una figura semejante a otra es de triple tamaño que el correspondiente en la figura pequeña, esa misma relación habrá entre todas las restantes dimensiones. Si la razón entre las longitudes correspondientes es de 1 a n, la razón entre las áreas será de 1 a n^2, y la razón entre los volúmenes será de 1 a n^3.

Como vemos el estudio de la semejanza de figuras está estrechamente relacionado con el estudio del razonamiento proporcional.

Una primera definición de figuras semejantes que se puede dar a los alumnos es que son figuras que "tienen el mismo aspecto" pero tamaños diferentes. Para ayudarles a comprender este concepto se pueden dibujar tres rectángulos en la pizarra. Hacer que dos sean semejantes, por ejemplo, con lados de razón 1 a 2. El tercer rectángulo deberá ser muy diferente, con lados en razón de 1 a 10, por ejemplo. ¿Qué rectángulos se parecen más? Al principio la noción de semejanza se desarrollará de manera intuitiva; después se podrá dar una definición más precisa: Dos figuras son semejantes si todos los ángulos son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. La siguiente actividad se puede hacer antes de proporcionar este tipo de definición.

Actividad 8: Construir una figura semejante

Dibujar o construir al menos tres figuras semejantes a una forma dada (rectángulos, triángulos o círculos, o cualquier polígono; en tres dimensiones pueden ser prismas rectangulares o cilindros circulares). Después de hacer las figuras, los alumnos medirán al menos tres longitudes en cada figura. También pueden calcular las áreas y los volúmenes. Poner todas las medidas en una tabla para hacer las comparaciones entre las mismas. Sugerir algunas comparaciones mediante razones.



Rectángulos semejantes

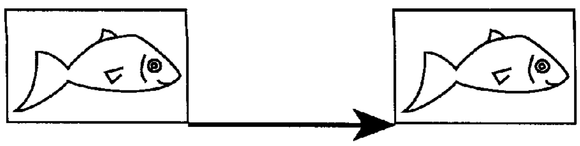
Comparar las razones de las longitudes de los lados y las razones entre las áreas.
Ejemplo: Razones entre el pequeño y el grande
Longitud: 2 a 6 (1 a 3)
Área: 12 a 108 (1 a 9)

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Se han realizado diversas investigaciones para estudiar la comprensión por los niños de diferentes edades de las propiedades de las figuras que son invariantes ante las transformaciones geometrías (traslaciones, giros y simetrías) y la construcción de las figuras transformadas. Incluimos a continuación algunos items, índices de dificultad y algunos tipos de errores observados.

Traslaciones

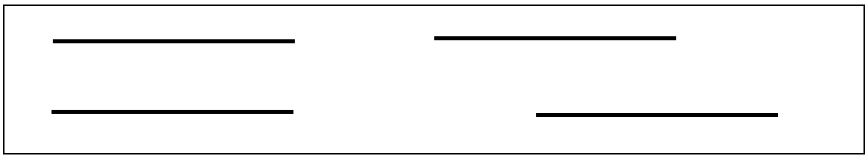
La traslación es la isometría más sencilla y, por lo tanto, plantea menos dificultades que las simetrías y los giros[3]. Las dificultades suelen surgir en los siguientes aspectos:
- La comprensión del concepto de vector libre como vector asociado a una traslación. Los estudiantes tienen la tendencia a pensar que una traslación consiste en llevar la figura hasta el extremo de la flecha dibujada indicativa de la traslación.
- La realización de traslaciones cuando la figura tiene forma poligonal (especialmente si es rectangular) y el vector de la traslación es paralelo a uno de sus lados. Es muy frecuente el error consistente en dibujar el vector empezando en un extremo del lado inicial y terminando en el otro extremo del lado imagen:



Conservación de la longitud de segmentos ante las traslaciones

Un test clásico de conservación de la longitud fue usado por Piaget. Se vale de dos varillas de la misma longitud; seguidamente se desplaza una de las varillas y se hacen preguntas al niño: ¿Son de la misma longitud? ¿Es una más larga o más corta que la otra?

[3] Jaime y Gutiérrez (1996, p. 68)



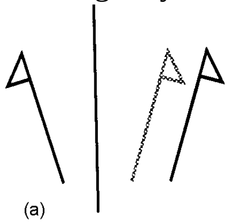
La mayoría de los estudios de este tipo han llevado a la conclusión de que los niños afirman que los segmentos tienen la misma longitud por término medio entre los seis y los ocho años de edad; reconocen que a pesar del desplazamiento, las longitudes de las varillas permanecen iguales. En estadios anteriores, no se llega a distinguir plenamente la longitud de la varilla de la posición de los extremos.

Simetrías

Jaime y Gutiérrez (1996) clasifican los errores de los alumnos sobre las simetrías en dos grupos:

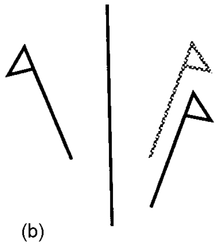
1) Errores cuyo origen está en el concepto de simetría, ya que surgen cuando los estudiantes no aplican correctamente las dos propiedades que relacionan una figura y su imagen:

- Falta de equidistancia al eje de cada punto y su imagen, como se muestra en la figura (a), donde la imagen correcta aparece punteada:



(a)

- Falta de perpendicularidad respecto del eje del segmento que une un punto y su imagen (b):

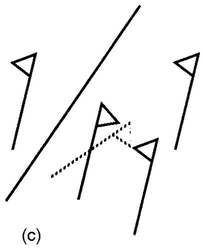


(b)

- Combinaciones de los dos errores anteriores. En todos los casos, los estudiantes olvidan alguna de las dos características de las simetrías, o ambas.

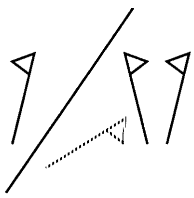
2) Errores cuyo origen está en una interpretación reducida o deformada de la simetría, que surgen cuando los estudiantes utilizan concepciones erróneas de tipo visual:

- Dibujo de la imagen paralela a la figura original aunque ésta no sea paralela al eje (c):



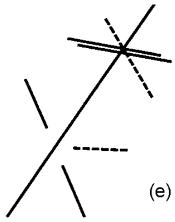
(c)

- Desplazamiento horizontal o vertical de la figura aunque el eje de simetría esté inclinado (d):

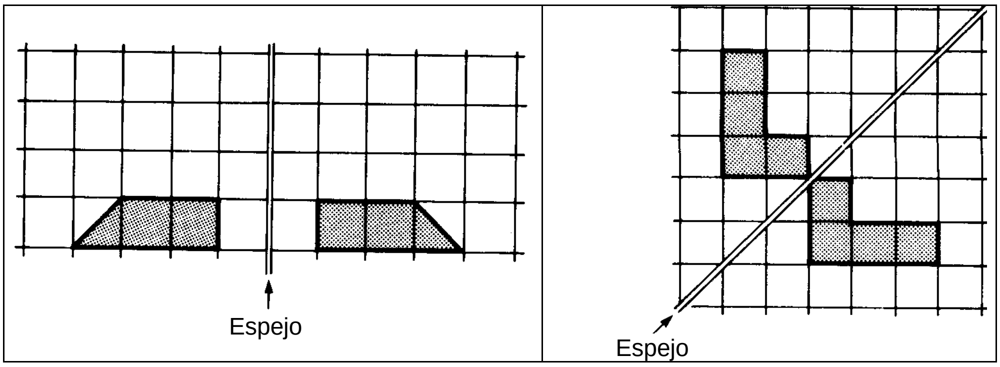


(d)

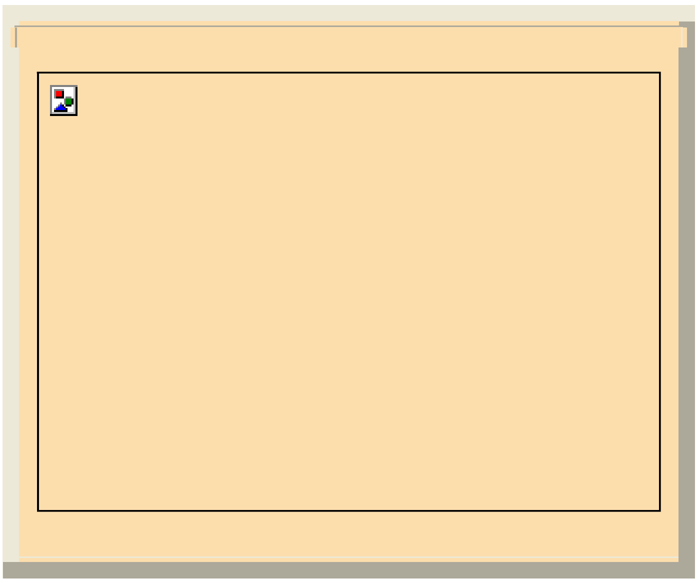
- Combinaciones de los dos errores anteriores, y dibujo de la imagen sobre la prolongación de la figura dada en alguna dirección específica (e).



Los índices de dificultad de las tareas dependen en gran medida de los valores particulares de algunas variables. Por ejemplo, la construcción de la imagen de una figura por una simetría resulta bastante más difícil si el eje no es vertical. Alrededor del 80% de los niños de 11 años dibujan la figura simétrica cuando el eje es vertical. Sin embargo, sólo el 14% tuvieron éxito cuando el eje era oblícuo [4]:



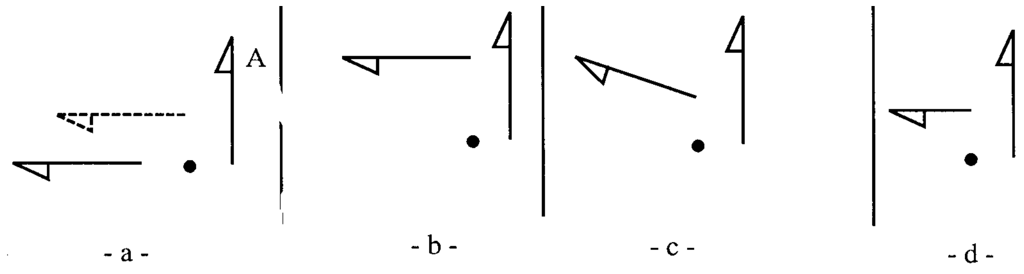
A título de ejemplo incluimos, a continuación, una de las preguntas incluidas en la evaluación internacional conocida como TIMSS[5], aplicada en España, sobre reconocimiento de ejes de simetría. El 47% de los alumnos de 13 años (7º de EGB) respondieron correctamente:



[4] Dickon, Brown y Gibson (1991, p. 75).
[5] http://www.ince.mec.es/pub/

Giros

Para comprender y usar correctamente el concepto de rotación de una figura, es necesario que los estudiantes apliquen bien las siguientes cinco características de esta transformación geométrica: reconocimiento global, ángulo de giro, equidistancia al centro, ángulo entre un punto y su imagen, y congruencia de las figuras[6]. En la siguiente figura se muestran cuatro errores típicos al aplicar un giro de 90º a la figura A sobre el punto marcado:



En la parte (a) destaca el fallo del ángulo de giro, en la (b) la falta de equidistancia al centro, en la (c) la perpendicularidad entre el objeto y su imagen, y en la (d) la falta de congruencia de las figuras.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de “Transformaciones geométricas. Simetría” en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres que no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 4º, 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis y construcción de situaciones introductorias

La figura incluida a continuación corresponde a una situación introductoria del estudio de la simetría en un libro de 4º de primaria[7].

a) ¿Piensas que los niños necesitan algunos conocimientos previos para entender la tarea?

b) ¿Qué respuestas esperan los autores por parte de los niños?

c) Indica algún recurso que podrían usar los niños para explorar la situación.

[6] Jaime y Gutiérrez (1996, p. 67).

[7] Ferrero, L. et. al. (1997). Matemáticas, 4º curso Primaria. Madrid: Anaya.

d) Diseña situaciones introductorias (que motiven y contextualicen) el estudio de las traslaciones y rotaciones)

La mariposa o la fachada del edificio son figuras que tienen eje de simetría.
Las dos manos o el cisne y su imagen en el agua son figuras simétricas respecto a un eje.

Observa y contesta:
1. ¿Qué ocurre si doblas cada una de estas ilustraciones por la línea de puntos?
2. ¿Podrías hacer coincidir una mano sobre la otra sin darle la vuelta?
3. ¿Qué parecidos y qué diferencias encuentras entre el cisne y su imagen en el agua?

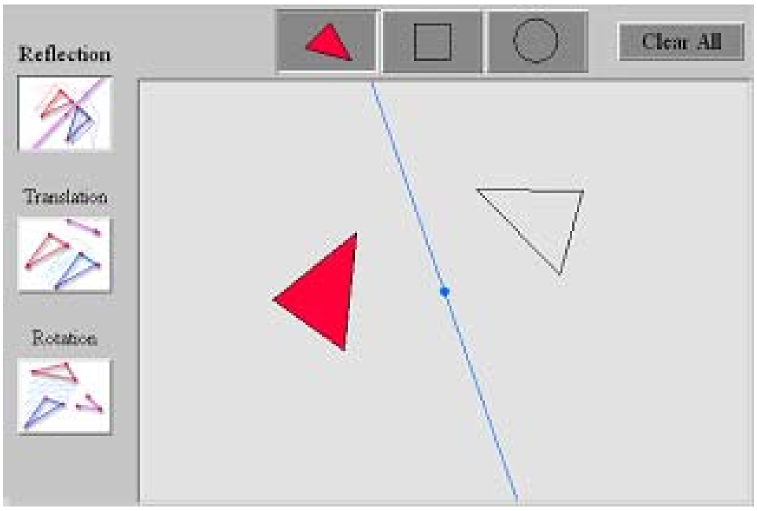
5.3. Visualización de transformaciones geométricas mediante programas interactivos

El NCTM proporciona en su página web (http://standars.nctm.org) un programa interactivo que puede ser útil para comprender las transformaciones geométricas, la congruencia, semejanza y simetría de las figuras.

Se compone de cuatro partes:
1. Visualización de transformaciones: Se puede elegir una transformación y aplicarla a una figura para observar la imagen resultante
2. Identificación de transformaciones desconocidas: Dadas una figura y su transformada se debe identificar la transformación aplicada.
3. Composición de simetrías: Se puede ver el resultado de aplicar un secuencia de simetrías de distintos ejes.
4. Composición de transformaciones: Aborda la composición de traslaciones, giros y simetrías.

Tarea 1: Visualización de movimientos

El fin de esta tarea es explorar los efectos de aplicar varias transformaciones a una figura. Se debe tratar de predecir el resultado de aplicar cada transformación.



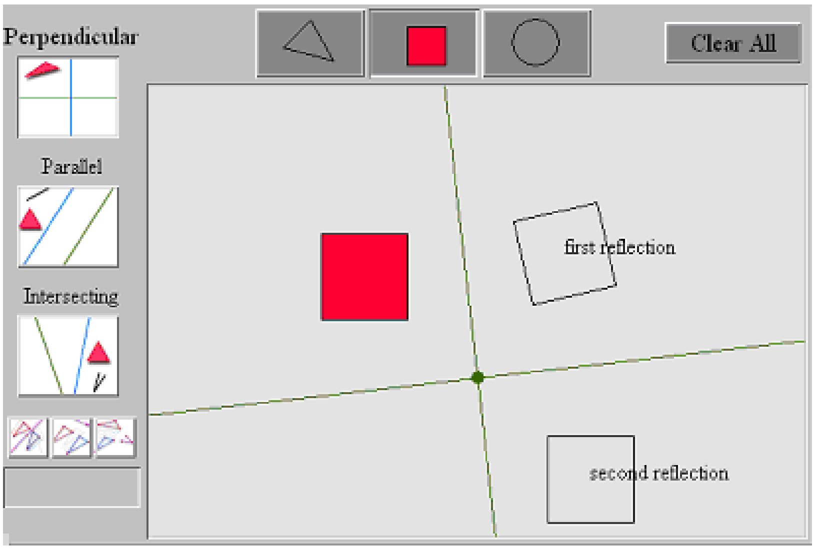
El programa permite girar la figura inicial (roja), así como el eje, y ver la figura transformada. Se puede elegir entre la simetría, la traslación o el giro.

¿Cuál es la relación entre la longitud de los lados y la medida de los ángulos de la figura inicial y la transfomada?.

Los profesores pueden preguntar a los estudiantes que describan la relación entre los ejes de simetría, los centros de rotación y las posiciones de preimágenes y las imágenes

Tarea 2: Identificación de transformaciones desconocidas

En esta tarea se debe determinar la transformación que se ha aplicado a una figura comparándola con su imagen, teniendo en cuenta las propiedades de las transformaciones. También se pueden formular y probar conjeturas haciendo uso de las opciones disponibles.



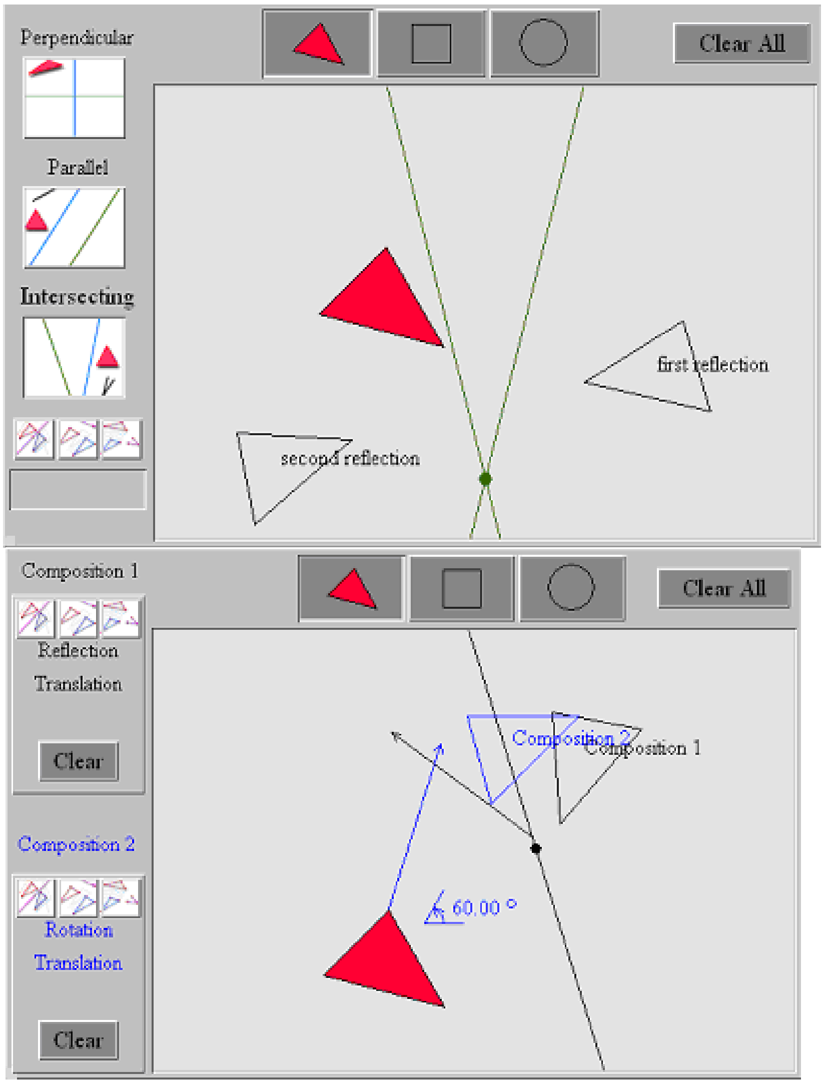
Con este software de geometría dinámica, los estudiantes pueden identificar una transformación desconocida de varias maneras: comparando la orientación de las figuras, analizando la correspondencia entre la imagen y el original o de algunos puntos sobre ellas, o también encontrando los puntos invariantes. Se pueden comprobar conjeturas construyendo la imagen de la figura original bajo la transformación que identifican.

Tarea 3: Composición de simetrías

Se trata de explorar la composición de simetrías con ejes que se cortan perpendicularmente o no y determinar qué transformación, si existe, puede producir el mismo resultado. Las figuras se pueden cambiar de posición y orientación arrastrando los vértices, viendo a continuación el efecto que se produce en las figuras transformadas.

Tarea 4: Composición de transformaciones

Consiste en aplicar sucesivamente tres transformaciones a la figura elegida. Al arrastrar los vértices de la figura inicial se puede ver de manera dinámica el resultado final. El profesor puede pedir a los alumnos que hagan conjeturas sobre qué tránsformación única, si existe, puede producir el mismo resultado que la composición.



Reflexión:

- ¿Qué propiedades de las figuras pueden observar los estudiantes usando este programa interactivo?
- Qué aspectos de la comprensión de las transformaciones geométricas por los alumnos, y de la congruencia de las figuras, se pueden ver afectados por el uso del programa.

- ¿Cuáles pueden ser las estrategias que pueden seguir los alumnos para hacer las tareas?
- ¿Cómo puede el profesor evaluar la comprensión de las transformaciones geométricas por los alumnos?

Bibliografía

Alsina, C., Pérez, R. y Ruiz, C. (1988). *Simetría dinámica*. Madrid: Síntesis.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (2001). Transformaciones geométricas. En, Enr. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 427-448)*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Jaime, A. y Gutiérez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Martínez, A. M. y Juan, F. R. (Coord.) (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

IV.

Didáctica de la Geometría para Maestros

Capítulo 3:

ORIENTACIÓN ESPACIAL. SISTEMAS DE REFERENCIA

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El Diseño Curricular Base del MEC no hace mención a las experiencias y conocimientos sobre localización espacial y los sistemas de referencia. Contrasta esta situación con las orientaciones de la Comunidad Autónoma de Andalucía, las cuales hacen mención también a las experiencias y nociones topológicas elementales. Resumimos a continuación estas orientaciones curriculares.

Conocimiento y representación espacial

Entre los aprendizajes más significativos que deben integrar el conocimiento del medio en el que el alumno está inmerso, sin duda ocupan un lugar de excepción los conocimientos sobre el espacio.

La realidad que nos rodea comprende objetos con forma y dimensiones diferenciadas, entre los que se establecen determinadas relaciones que configuran aspectos importantes de la vida cotidiana.

Al propio tiempo, las propiedades geométricas de los objetos y lugares, las afinidades y diferencias entre ellas, las transformaciones a las que pueden ser sometidas y la sistematización, conceptualización y representación de todo ello, constituyen un campo de conocimientos idóneo, que puede contribuir al desarrollo intelectual de los alumnos de esta etapa.

Al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y representación espacial el alumno progresará, en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclidianas, que le facilitarán su adaptación y utilización del espacio.

Percepción, conocimiento y generalización de nociones topológicas básicas y aplicación de las mismas al conocimiento del medio.

Durante toda la etapa se propondrán situaciones en las que intervengan nociones como proximidad, separación, orden, cerramiento, continuidad... Se comenzará por vivenciarlas mediante juegos y actividades donde los alumnos hayan de situarse, aproximarse, desplazarse, etc. Posteriormente lo harán con objetos y elementos reales, estableciendo relaciones espaciales como cerca, lejos, dentro, fuera, sobre, debajo, delante, etc.

Seguidamente se tratará, en situaciones contextualizadas, la relativización de estos conceptos, invitándoles a la secuenciación, clasificación y representación de las relaciones en orden a un referente establecido. Se trabajará la representación oral y gráfica de las acciones realizadas, mediante signos y códigos elaborados por los propios alumnos. Ello facilitará la representación mental de estas nociones.

A lo largo del proceso se potenciará la búsqueda de regularidades y la estimación de propiedades en estas relaciones: transitividad, conservación, reflexividad, etc. proponiendo a los alumnos la reflexión acerca de la importancia de las mismas en la situación y estructuración de los elementos en el espacio.

Coordinación de las diversas perspectivas desde las que se puede contemplar una realidad espacial.

El descubrimiento de la noción de óptica relativa, o capacidad para concebir la situación y posición de los objetos en el espacio, si los imaginamos desde varios puntos de referencia, constituye un importante contenido.

Mediante observaciones dirigidas, acciones sobre objetos reales y manipulación de material apropiado en situaciones de aprendizaje diseñadas al efecto, se acercarán los alumnos a las distintas nociones proyectivas: perspectiva, rectitud, distancia, paralelismo, ángulo, simetría, etc.

Se tratará de que los alumnos y alumnas actúen interesados por la resolución de problemas espaciales y manifestando curiosidad ante sus descubrimientos. El profesor les ayudará en la formulación de hipótesis y conjeturas en relación con las situaciones propuestas.

Desarrollo de los sistemas de referencia. Localización de objetos en el espacio

La orientación, ubicación y movimiento de objetos en el espacio implica la existencia de determinados elementos de referencia en función de los cuales puede localizarse la dirección y posición de estos.

Durante la etapa primaria se desarrollará progresivamente en los alumnos la utilización de la horizontalidad y verticalidad como ejes de referencia. Ello dará lugar a nociones como derecha, izquierda, arriba, abajo, etc. y a la coordinación de las mismas.

Se concederá especial importancia a la representación y lectura de puntos en los sistemas de coordenadas cartesianas, así como a la elaboración e interpretación de croquis de itinerarios. En relación con el conocimiento del mundo físico, se trabajará, graduando la dificultad, la construcción de planos y maquetas, cuyo análisis puede ser fuente de conocimientos geométricos. Posteriormente se abordarán la lectura, interpretación y reproducción a escala, de mapas elementales.

Los Principios y Estándares 2000 del NCTM

En estas orientaciones curriculares se incluye un objetivo general sobre especificación de posiciones, descripción de relaciones espaciales usando sistemas de representación. Su detalle y desglose entre los ciclos Infantil a 2º curso y de 3º a 5º curso es el siguiente:

Infantil a 2º curso	3º a 5º curso
- describir, nombrar e interpretar las posiciones relativas en el espacio y aplicar ideas sobre posición relativa; - describir, nombrar e interpretar la dirección y distancia en el movimiento espacial y aplicar ideas sobre dirección y distancia; - encontrar y nombrar posiciones con	- describir posiciones y movimientos usando el lenguaje común y el vocabulario geométrico; - construir y usar sistemas de coordenadas para especificar posiciones y describir trayectorias; - encontrar la distancia entre puntos en las direcciones horizontal y vertical del

relaciones simples, como "cerca de" y en sistemas de coordenadas tales como en los mapas.	sistema de coordenadas.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Las primeras nociones de posición relativa que aprenden los niños pequeños son las de encima, debajo, detrás, delante, entre. Más tarde pueden usar rejillas rectangulares para localizar objetos y medir la distancia entre puntos según direcciones horizontales y verticales. Las experiencias con el sistema de coordenadas rectangulares serán útiles a medida que resuelven una variedad de problemas de geometría y álgebra. En los niveles superiores de primaria y en secundaria el sistema de coordenadas puede ser útil para explorar y descubrir propiedades de las figuras. Encontrar distancias entre puntos del plano usando escalas en mapas es importante en estos niveles.

En los primeros niveles de primaria los alumnos pueden trabajar con interpretaciones de las operaciones aditivas sobre la recta numérica. En niveles posteriores la recta numérica se puede usar para representar los distintos tipos de números. En el segundo ciclo de primaria las rejillas rectangulares y las tablas de doble entrada pueden ayudar a los alumnos a comprender la multiplicación.

2.1. El desarrollo de sistemas de referencia

El movimiento en el espacio supone servirse de puntos de referencia merced a los cuales localizar la dirección y la posición. Las investigaciones indican que un factor importante en el desarrollo de la apreciación espacial es la capacidad para utilizar alguna suerte de sistema de referencia. "Piaget e Inhelder consideran que la conceptualización de "marco de referencia" reviste carácter fundamental para que el individuo posea la facultad de habérselas con la orientación, la ubicación y el movimiento de objetos; constituye, por consiguiente, el punto culminante de todo el desarrollo psicológico del espacio euclideo" (Dietz y Barnett, 1978; citado por Dickson y Brown,1991, p. 56).

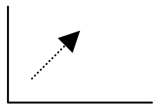
La esencia de un sistema de referencia es la relación de las partes móviles con algún aspecto invariable y estacionario del espacio; por ejemplo, una superficie horizontal, los ejes de una gráfica, la noción de dirección norte. Tales son los puntos de referencia que proporcional el armazón sobre el cual estudiar el movimiento de, pongamos por caso, bloques de construcción, un triángulo o un barco.

Según Piaget e Inhelder, el desarrollo de sistemas de referencia se funda en la capacidad natural de utilizar el que ellos describen como marco de referencia natural, a saber, el correspondiente a la horizontal y la vertical.

Un elemento importante para servirse satisfactoriamente de los sistemas de referencia es la conciencia de la dirección. Greenes sostiene que, de ordinario, las relaciones espaciales se exploran inicialmente a lo largo del eje vertical, o sea, mirando arriba y abajo. Arriba/abajo, alto/bajo, encima/debajo, etc, son nociones todas ellas de muy distinto significado; por ejemplo, lo que se ve al mirar al techo es muy distinto y diferenciable de lo que se ve al mirar al suelo. Se desarrollan después las relaciones de orientación horizontal, las cuales, en cambio no se encuentran tan tajantemente diferenciadas. Aunque al mantener la cabeza en una dirección particular lo que se ve está al frente y lo que no se ve se encuentra a espaldas nuestras, si nos volvemos, lo que antes estaba delante se encuentra ahora detrás de nosotros, y análogamente, lo que estuvo a la izquierda se encuentra ahora a la derecha. La noción de orientación horizontal tarda más en desarrollarse que la orientación vertical, porque la relativa facilidad del movimiento del propio cuerpo sobre un plano horizontal confunde la orientación.

Piaget y colaboradores sostienen que la capacidad para utilizar coordenadas se desarrolla juntamente con la de utilizar ejes de referencia horizontal y vertical. Estos investigadores presentaron a los niños dos hojas congruentes de papel. En una de ellas se había señalado un punto. Se le pedía al niño que marcase un punto en la segunda hoja, semitransparente, de modo que si ésta fuera colocada directamente sobre la primera, la provista del punto, los puntos de una y otra coincidieran exactamente.

Los resultados en esta tarea mostraron que en el nivel más elemental de desarrollo, el niño se apoyaba por completo en una estimación visual que posteriormente conducía a una estimación burda mediante reglas y palitos. Es en una siguiente fase en la que el niño capta la necesidad de medir, pero sigue operando todavía con una única medida, tal como la distancia desde el punto a un vértice cercano.



Más tarde se percata de la necesidad de dos medidas. Tal procedimiento presupone muchísimos tanteos, en los que es frecuente que el niño utilice solamente una medida y efectúe una estimación de la segunda. Por fin, hacia los nueve años de edad (según Piaget) se coordinan ambas mediciones, utilizando los lados de la hora como ejes de referencia.

Ejercicio

1. En una colección de libros de texto de primaria identificar los niveles en los cuales se incluyen actividades de,

- orientación espacial
- localización de puntos en el plano

2.2. La variable tamaño del espacio

Una de las variables que se debe tener en cuenta en el proceso de adquisición del dominio de las relaciones con el espacio es la dimensión física del ámbito con el que el sujeto entra en relación. Las investigaciones psicológicas muestran que el niño va estructurando sectores más amplios del espacio a medida que incrementa la magnitud de sus propios desplazamientos. Brousseau distingue tres valores de la variable “tamaño del espacio” con el que interactúa el sujeto. Estos valores implican modos diferentes de relaciones con los objetos incluidos en ese sector del espacio y, en consecuencia modelos conceptuales diferentes para orientar la acción del sujeto. Esta variable interesa segmentarla en tres valores: microespacio, mesoespacio y macroespacio, cuyas características describimos a continuación[1].

[1] Gálvez, G. (1985) *El aprendizaje de la orientación en el espacio urbano.Una proposición para la enseñanza de la geometría en la escuela*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación del IPN. México. (p. 49).

El microespacio

Corresponde a un sector del espacio próximo al sujeto y que contiene objetos accesibles tanto a la visión, como a la manipulación. En este sector el sujeto puede mover el objeto o bien moverse a sí mismo prácticamente en cualquier dirección. El juego de desplazamientos de sujeto y objeto, permite reestablecer cualquier perspectiva, mediante inversiones o compensaciones de las transformaciones anteriores. Puesto que todas las posiciones relativas entre sujeto y objeto son igualmente posibles y fáciles de obtener la percepción del objeto puede ser caracterizada como exhaustiva. Por otra parte, el sujeto obtiene una información abundante e inmediata de los resultados de las acciones que ejerce sobre el objeto. El sujeto controla plenamente sus relaciones espaciales con el objeto, debido a la abundancia de recursos de transformación con que cuenta.

En el microespacio el dominio de las relaciones con el objeto se adquiere a través de un proceso largo y difícil, pero bastante temprano (según los trabajos de Piaget). Este proceso se realiza “espontáneamente”, en el sentido de que no requiere de intervención intencional (institucional) para producirse, aunque sí oportunidades para ejercitar las manipulaciones de que el sujeto va siendo capaz. Posteriormente, el trabajo escolar impone cierta reestructuración del microespacio al introducir dos direcciones ortogonales para orientar el papel (y otros materiales) sobre el pupitre.

El mesoespacio

Es una parte del espacio accesible a una visión global, obtenida a partir de percepciones sucesivas, pero con desfases temporales mínimos. Contiene objetos fijos, no manipulables. Como un ejemplo de mesoespacio, podemos citar el espacio que contiene a un edificio, que puede ser recorrido por el sujeto tanto interior como exteriormente.

En este sector del espacio, puesto que los objetos permanecen fijos, funcionan como puntos de referencia para el sujeto (en nuestro ejemplo, los muebles, puertas, pareces), mientras que el sujeto sí puede desplazarse, pero con restricciones, derivadas de dos condiciones:

1. La posición erecta del sujeto, que genera una experiencia diferencial respecto a las direcciones horizontal y vertical. Estas constituyen las direcciones básicas para la organización del mesoespacio.
2. La necesidad de acomodar los desplazamientos en función de la localización de los objetos. Resultan de aquí trayectso obligados, como los determinados por corredores o escaleras, que implican la diferenciación de espacios vacíos y llenos.

Podemos decir que el mesoespacio es el espacio de los desplazamientos del sujeto. La experiencia está aquí restringida a los puntos de vista obtenibles a través de los desplazamientos posibles del sujeto, manteniendo su postura erecta. Esto no significa que sea imposible para el sujeto adoptar otras perspectivas, sino que, en la medida en que éstas no son usuales, no contribuyen significativamente a la estructura del mesoespacio.

Para organizar sus desplazamientos dentro del mesoespacio el sujeto necesita orientarlo, atribuyéndole tres dimensiones respecto a un sistema de referencia fijo. También le ha atribuido extensión, con lo que las distancias entre objetos pasan a tomar una relevancia de la que carecen el microespacio. Los ángulos son muy importantes, puesto que están a la base de cambios de perspectiva muy económicos, que corresponden a giros del sujeto mientras conserva su posición (giros que incluso puede efectuar moviendo solamente su cabeza)

El macroespacio

Corresponde a un sector del espacio cuya dimensión es tal que sólo puede abarcarse a través de una sucesión de visiones locales, separadas entre sí por desplazamientos del sujeto sobre la superficie terrestre. En el macroespacio es imposible obtener una visión global simultánea del sector del espacio con el que se interactúa, a menos que el sujeto se eleve en el aire, experiencia a la que raras veces se recurre para estructurar el espacio terreste a nivel de experiencia cotidiana.

Al igual que en el mesoespacio, en el macroespacio los objetos permanecen fijos, es el sujeto el que se desplaza. Para orientar sus desplazamientos debe construir una representación global del macroespacio, ligando sus visiones parciales para recuperar la continuidad del espacio recorrido. La conceptualización es imprescindible para la construcción de una imagen de conjunto, inaccesible a la percepción directa.

Podemos distinguir tres tipos de macroespacio: el urbano, el rural y el marítimo. En el macroespacio urbano y rural, existen múltiples objetos que pueden ser utilizados por el sujeto como puntos de referencia para estructurar su representación. La posibilidad de utilizarlos dependerá tanto de las características específicas del sector considerado como de la experiencia previa del sujeto. Aunque, en general, el macroespacio urbano suele ser más pródigo en objetos que pueden funcionar como signos para la diferenciación precisa de sus partes (por ejemplo, la información escrita contenida en nombres de calles y comercios, en letreros de propaganda, etc.). A diferencia de lo que ocurre en los otros dos, en el macroespacio marítimo, particularmente en la navegación en alta mar, no es posible recurrir a una sucesión de encuentros con determinados objetos para replicar un trayecto.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

3.1. Situación 1[2]: Búsqueda de un objeto escondido en clase

Nivel: Ciclo inicial; trabajo en el mesoespacio.

Descripción:

Mientras un alumno sale del salón otro esconde un objeto en una banca y marca dicha banca sobre un plano del aula que el maestro ha hecho en la pizarra (Variante 1) o reproducido en una hoja de papel (Variante 2). Entra el alumno que estaba fuera y viendo el plano, tiene que dirigirse a la banca donde, de acuerdo a su interpretación del plano, se encuentra el objeto escondido. Los demás le comunican si acertó o no. En la Variante 2 cada alumno tiene una copia del plano del salón y debe ir registrando sobre cada banca usada como escondite, el nombre del niño al que le correspondió buscar en esa ocasión.

3.2. Situación 2[3]: Búsqueda de un objeto escondido dentro del espacio escolar.

Niveles: 1er Ciclo de primaria

[2] Galvez (1985, p. 65)
[3] Galvez (1985, p. 74)

Descripción:

Dos alumnos esconden un objeto (una moneda) en algún lugar de la escuela, elegido por ellos. Un tercer alumno los observa y traza un dibujo que servirá para guiar a un cuarto alumno en la búsqueda del objeto escondido. Si este último encuentra la moneda, puede quedársela. Si la búsqueda se convierte en una exploración al azar el experimentador da por terminada la jugada; declarando que la comunicación ha fracasado. La actividad se repite, intercambiando las funciones, y luego con otros cuatro alumnos.

3.3. Situación 3[4]: Localización de objetos en el microespacio

Nivel: 2º Ciclo

Descripción:

En el fondo de una caja de cartón (de aproximadamente 60 cm x 50cm x 5cm) se pone un trozo de papel (de unos 15 cm^2), a la vista de los niños. Se tapa la caja con una tela y se les pide que estimen la localización del papel clavando un alfiler sobre la tela para atraparlo. Se levanta la tela para ver si acertaron.

<u>Variante 1</u>: Juego individual. Si el niño acierta se dobla el papel a la mitad, hasta que yerra. Gana quien logre atinarle al papel más pequeño.

<u>Variante 2</u>: Un niño esconde un papel (del tamaño al que llegaron, en promedio, en la Variante 1) y le explica a otro niño, verbalmente (sin señalar) su localización bajo la tela. El segundo niño clava el alfiler y luego verifican si atinó.

<u>Variante 3</u>: Un niño esconde un papel (pequeño) y le explica a otro niño, mediante un dibujo, su localización bajo la tela. El segundo niño trata de llegar hasta el papel a través de la tela, clavando su alfiler.

3.4. Situación 4[5]: Localización relativa de lugares conocidos en la ciudad

Nivel: 2º o 3º Ciclo de primaria

Descripción

La actividad se inicia pidiendo a los alumnos que nombren lugares interesantes de la ciudad, donde llevarían a un amigo que no la conociera. Se seleccionan algunos de los lugares propuestos. Se reparte a cada alumno una hoja en blanco y un conjunto de papelitos con los nombres de los lugares seleccionados para que los distribuyan sobre el papel, basándose en su conocimiento de las posiciones relativas de estos lugares en la ciudad (imagínate cómo se vería desde un avión). Una vez distribuidos, los pegan sobre la hoja y marcan el orden en el que organizarían un recorrido para visitarlos todos.

3.5. Situación 5: Construcción de una brújula y de un plano de la escuela

Nivel: 2º o 3º Ciclo de primaria

Descripción:

---

[4] Galvez (1985, p. 81)
[5] Galvez (1985, p. 85)

Consigue una aguja, un imán pequeño, un recipiente con agua, pegamento y un pedazo de corcho o de madera.

- Frota la aguja en el imán varias veces.
- Pega la aguja en el corcho.
- Coloca el corcho en el recipiente con agua.
- Gira el recipiente y observa que la aguja se mueve y apunta siempre al mismo lugar. Ese lugar es el norte.

1) Usa la brújula para encontrar la orientación de la escuela.

¿Qué parte de tu clase da hacia el norte?
¿Hacia dónde queda la salida de la escuela?
¿Qué hay hacia el sur?

2) Trabajando en equipo dibujar un plano de la escuela y los lugares que están cerca de ella. Fíjense en los puntos cardinales usando la brújula que hicieron. No olviden ponerle el cuadro de acotaciones y la Rosa de los Vientos.

Ejercicio de análisis didáctico:

Para cada una de las situaciones descritas:

a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
c) Identificar las variables didácticas
d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.

4. TALLER DE DIDÁCTICA

4.1. Análisis de experiencias de enseñanza

Las siguientes situaciones, conocidas como "El cartero" y "Viajes y geógrafos", han sido experimentadas por el equipo de investigación del profesor G. Brousseau en la escuela Jule Michelet. Para cada una de las situaciones:

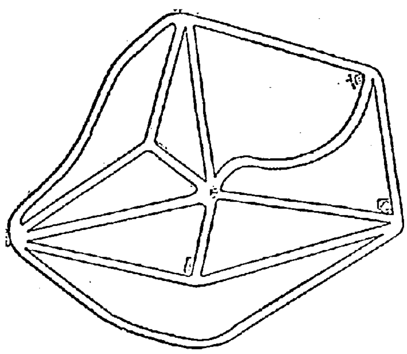
a) Formula los objetivos que se pretenden con las situaciones
b) Enumerar y describir los conocimientos que se ponen en juego
c) Identificar las variables didácticas
d) Enunciar variantes posibles de las situaciones cambiando los valores de las variables didácticas
e) Identificar posibles técnicas de solución de los alumnos y dificultades previsibles
f) Indicar las posibles explicaciones (institucionalización) que el profesor podría dar como síntesis final de la actividad realizada.

El Cartero

Niveles: 2º o 3º Ciclo

Material:

Se prepara sobre una cartulina una representación en planta de un espacio urbano: calles y lugares como edificios o parques, localizados en los cruces de dos o más calles. La cartulina se cubre con una tela que tiene una perforación de aproximadamente 2.5 cm de diámetro y que, al recorrerse, permite observar todo el espacio dibujado, a través de visiones locales. Cada grupo de 4 niños trabaja con uno de estos dispositivos.



Descripción:

Mientras algunos equipos de 4 niños practican juegos destinados a consolidad sus nociones de aritmética a otros se les entrega un diagrama (como el de la figura adjunta) cubierto con una tela perforada y un juego de tres tarjetas. No se imparten instrucciones orales.

La tarjeta 1 propone una actividad de exploración del diagrama: recorrerlo (a través del agujero) hasta que ya no encuentren lugares nuevos.

La tarjeta 2 indica que uno de los jugadores será el Jefe de Correos y ordenará a los demás, por turnos, llevar cartas a diversos lugares; se discutirá la adecuación del recorrido seguido.

La tarjeta 3 sugiere pedir trayectos más complejos y da dos ejemplos: ir de A a B, sin pasar por C o dejar cartas en A, B, y C.

Variante 1: Juego de los mensajes

Se entrega a cada equipo un diagrama, una tela perforada, una tarjeta de instrucciones general y 12 tarjetas de instrucciones específicas, del tipo: "Estás en la fuente; tienes que ir al Banco y después al Supermercado", etc. La tarjeta con instrucciones generales es la siguiente:

> *Ustedes con un equipo de mensajeros que van a trabajar en una ciudad. Bajo la tela está el dibujo de esta ciudad que sólo puede verse por el agujero. Pueden deslizar la tela, de manera que el agujero nos deje ver adónde llegan las calles. En las tarjetas está escrito lo que tienen que hacer los mensajes. Los mensajeros pueden trabajar solos o por parejas, como quieran.*
>
> *El juego consiste en realizar la mayor cantidad posible de las tareas que están escritas en las tarjetas.*
>
> *Antes de empezar a jugar el equipo puede explorar la ciudad, a través del agujero, hasta que cada niño piense que ya la conoce bien y que puede hacer el trabajo de mensajero.*

Variante 2: Viajeros y geógrafos

Se presenta uno de los mismos diagramas utilizados en las dos situaciones anteriores, cubierto con la tela perforada. Se propone explorar el diagrama, desplazando la tela y luego, hacer un plano del diagrama oculto, que será utilizado por los "geógrafos" para anticipar el destino de los "viajeros". Una vez hecho el plano, el equipo se divide en dos parejas: una de geógrafos y la otra de viajeros. Los geógrafos se instalan con el plano en un rincón distante y pueden hacer preguntas, que serán respondidas por los viajeros, para determinar si su plano corresponde o no al diagrama. A continuación se inicia el juego. De común acuerdo, ambas parejas eligen un lugar de partida y lo localizan en el diagrama y en el plano, respectivamente. Los viajeros enuncian una dirección y de avance y los geógrafos, viendo su plano, anticipan a qué lugar van a llegar los viajeros. Entonces los viajeros avanzan y verifican dónde llegan. Se registra si la predicción de los geógrafos fue acertada o no. Después de un rato, geógrafos y viajeros intercambian roles. Finalmente, se organiza un debate para determinar su sistema común de designación de direcciones y para discutir si el mapa era o no una representación correcta del diagrama.

4.2. Análisis de textos y diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con la orientación espacial y sistemas de referencia.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los distintos cursos de primaria.

BIBLIOGRAFÍA

Aides Pédagogiques pour le Cycle Moyen. (1983), Elem-Math VII. Publication de l'A.P.M.E.P., nº 49.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

V.

Didáctica de la Medida de Magnitudes para Maestros

Juan D. Godino
Carmen Batanero
Rafael Roa

Índice

Página

Capítulo 1: MAGNITUDES Y MEDIDA

Capítulo 2: MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

V.

Didáctica de la Medida de Magnitudes para Maestros

Capítulo 1:

MAGNITUDES Y MEDIDA

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El estudio de las magnitudes y su medida es importante en el currículo de matemáticas desde los niveles de educación infantil hasta secundaria debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria. El estudio de la medición también ofrece oportunidad de aprender y aplicar otros contenidos matemáticos, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos y la noción de función. Permite establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras áreas diferentes, como el área de sociedad, ciencias, arte y educación física.

La medida de magnitudes pone en juego un conjunto de destrezas prácticas y un lenguaje (o si se prefiere, una serie de nociones) cuyo dominio y comprensión no es fácil para los niños de primaria. En la educación primaria su estudio se extiende desde el primer curso hasta el último, incluyéndose incluso algunas actividades en los niveles de infantil (percepción de cualidades de objetos, comparación, clasificación, seriación). Es un tema que guarda, además, una estrecha relación con la construcción de los sistemas numéricos y con las formas y figuras geométricas (longitud, superficie, volumen de figuras y cuerpos geométricos), tanto en las técnicas de medida directa (contar el número de unidades) como indirecta (determinación del "tamaño" de las colecciones, o las dimensiones de los cuerpos y figuras mediante operaciones aritméticas y algebraicas.

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el bloque 2, dedicado a la medida el DCB considera que la medida es una vía de acceso para el desarrollo de los conceptos numéricos, así como el nexo entre los distintos bloques de Matemáticas.

El tratamiento cíclico permite ir profundizando desde las unidades naturales a las relaciones entre las unidades del Sistema Métrico Decimal.

Los contenidos procedimentales y actitudinales favorecen la adquisición de los diversos contenidos que aparecen en hechos y conceptos.

Hechos, conceptos y principios

1. Necesidad y funciones de la medición.
   • Reconocimiento e identificación de magnitudes.
   • Comparación de magnitudes.
   • Unidad de referencia. Unidades corporales.
2. El perímetro, el área y el volumen de las figuras como expresiones cuantitativas de su tamaño.
3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal.
   • Longitud.
   • Superficie.
   • Capacidad.
   • Masa.
4. Las unidades de medida de uso local.
5. Las unidades de medida para la medición del tiempo.
6. La unidad de medida para la medición de ángulos: el grado.

Procedimientos

1. Mediciones con unidades convencionales y no convencionales.

• Utilización de instrumentos de medida.
• Utilización de distintas estrategias para medir.

2. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones directas de longitudes, superficies y capacidades.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, de manera exacta y aproximada.
4. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo estimaciones de medidas en situaciones naturales.
5. Toma de decisiones sobre las unidades de medida más adecuadas en cada caso atendiendo al objetivo de la medición.
6. Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
7. Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.
8. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.

Actitudes, valores y normas

1. Valoración de la importancia de las mediciones y estimaciones en la vida cotidiana.
2. Interés por utilizar con cuidado diferentes instrumentos de medida y emplear unidades adecuadas.
3. Gusto por la precisión apropiada en la realización de mediciones.
4. Curiosidad e interés por descubrir la medida de algunos objetos y tiempos familiares.
5. Valoración del Sistema Métrico Decimal como sistema de medida aceptado internacionalmente.
6. Tendencia a expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades de medida utilizadas.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[1]

Los objetivos específicos que los Estándares 2000 proponen para el estudio de la medición en los niveles de infantil a 2º son los siguientes:

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- reconociendo los atributos de longitud, volumen, peso, área y tiempo;
- comprendiendo cómo medir usando unidades no estándar y estándar;
- seleccionando la herramienta y unidad apropiada para medir el atributo que se desea medir.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones, realizando las siguientes actividades:

- medir usando colecciones de objetos de igual tamaño, como clips puestos correlativamente;
- medir un objeto usando como unidad otro de menor tamaño, como la longitud de una habitación usando un metro;
- usar instrumentos de medir,
- desarrollar referentes comunes de medida para hacer comparaciones y estimaciones.

Estos mismos objetivos se desarrollan en los niveles 3 a 5 en la forma siguiente:

[1] National Council of Teachers of Mathematicas (2002). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:
- comprender atributos de longitud, área, peso, volumen y amplitud angular y seleccionar el tipo apropiado de unidad para medirlos;
- comprender la necesidad de medir con unidades estándares y familiarizarse con el sistema métrico.
- hacer conversiones entre unidades, como pasar centímetros a metros;
- comprender que las mediciones son aproximadas y cómo afecta a la precisión el cambio de unidades;
- explorar lo que sucede a las medidas de una figura bidimensional como el perímetro y el área cuando se cambia la forma de algún modo.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones:
- desarrollar estrategias de estimación de perímetros, áreas y volúmenes de formas irregulares;
- seleccionar y aplicar las unidades estándares y los instrumentos de medida de longitud, área, volumen, peso, tiempo, temperatura y amplitud angular;
- seleccionar y usar patrones de comparación para estimar medidas;
- desarrollar, comprender y usar fórmulas para encontrar el área de rectángulos, triángulos y paralelogramos;
- desarrollar estrategias para determinar áreas superficiales y volúmenes de sólidos rectangulares.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de la medida en,
- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Principio de conservación. Conservación de la longitud

Se refiere a la capacidad que tienen algunas características de los cuerpos, de no cambiar aunque se les manipule y se produzcan cambios de situación en los mismos, que perceptivamente puede llevar a engaño.

Se dice que un niño ha adquirido la capacidad de conservación si no se deja llevar por su percepción. Esta propiedad referida, por ejemplo al número, hace que un cambio en la disposición de unas canicas puestas en fila pueda llevar al niño a pensar que el número de ellas ha cambiado si se las dispone con una separación mayor. El no cometer errores de este tipo, signo de que el niño ha adquirido la capacidad de conservación referido a una determinada propiedad, está relacionado con el principio de reversibilidad, es decir, el conocimiento de que muchos cambios son reversibles y que, mediante la acción adecuada, se puede volver a la situación inicial.

La adquisición del principio de conservación se puede facilitar planificando y realizando en clase tareas adecuadas que deben llevar al niño a:
- Diferenciar acciones reversibles y no reversibles sobre objetos.
- Reconocer qué propiedades cambian y cuales no cuando se realizan determinadas acciones sobre los objetos.
- Diseñar sencillos experimentos referidos a propiedades concretas sobre objetos concretos.

A continuación describimos las etapas que se distinguen en el desarrollo de este principio en las magnitudes geométricas; estas etapas son orientativas y en ningún momento pueden considerarse compartimentos estancos, aislados unos de otros, y con una rigidez cronológica. Además, la diversidad se va a manifestar en cada niño y su desarrollo va a estar determinado, entre otros factores, por la cantidad de estímulos recibidos a lo largo de su vida, tanto en su casa como en la escuela, es decir, por la cantidad de experiencias y la adecuación de las mismas.

Conservación de la longitud

Hay que distinguir, siguiendo la terminología de Piaget, varias etapas en lo que se refiere a la adquisición del principio de conservación de la longitud por parte del niño:

- En un *primer estadio* la longitud de una línea (ya sea recta, curva o poligonal) va a depender solo de los extremos.
- En un *segundo estadio* dos segmentos que en un principio reconoce de la misma longitud, dejan de tenerla al desplazar uno de ellos pues el niño se fija solo en el punto final de cada segmento y no en los puntos iniciales; según el punto o puntos en que el niño fije su atención le llevará a resultados diversos que, incluso, van a depender de la longitud de los segmentos utilizados.
- En el *tercer estadio* es cuando el niño percibe como iguales longitudes que realmente lo son, independientemente de consideraciones ajenas, y es entonces, alrededor de los 7 años, cuando adquiere el principio de conservación de la longitud.

Otro aspecto de la longitud, normalmente asociada con las dimensiones de los objetos, es la distancia, entendida como espacio vacío entre objetos. A edades tempranas el niño suele pensar que la distancia entre dos objetos cambia si se interpone un tercer objeto entre ellos y es la percepción correcta de las distancias uno de los aspectos que le llevarán a la adquisición del principio de conservación de la longitud y hará que el niño esté en condiciones de abordar el estudio de la medida de longitudes y su aplicación posterior al cálculo de perímetros.

Actividades:

1. Se presentan al niño dos varillas de la misma longitud y diferente grosor y se le pide que diga cuál de ellas es más larga.

2. Se presentan al niño dos varillas que él admite que son iguales y a continuación, a la vista del niño, se desplaza una de ellas y se le pide que diga cuál de ellas es ahora más larga.

3. Se le presentan al niño dos segmentos paralelos de distinta longitud pero cuyos extremos finales llegan al mismo sitio y se les pide que digan cual de ellos es el de mayor longitud.

4. Sobre un papel cuadriculado se le presentan al niño dos segmentos de igual longitud pero uno de ellos está desplazado, por ejemplo, dos cuadraditos respecto del otro y se le pide al niño que diga cual es el de mayor longitud.

Otras actividades podrían ser con cuerdas que se trocean o a las que se les hacen nudos y, referidos a distancias, se podría pensar en considerar objetos interpuestos, intercambio entre los objetos (simetría) y distancias por etapas (transitividad).

Experiencias como las que acabamos de describir van a permitir al maestro obtener información acerca del desarrollo psicológico de sus alumnos y, por otra parte, realizadas convenientemente, ayudarán a los niños en dicho desarrollo.

2.2. Facetas y etapas en el estudio de la medición en la escuela[2]

¿Cómo aprende un chico a medir? Si analizamos el proceso, encontramos que se trata de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con aspectos de geometría y aritmética. También implica al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. El proceso procede secuencialmente desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente) y sigue las siguientes etapas que describimos a continuación.

2.2.1. Papel de percepción en la medición

La medición comienza con la percepción de lo que debe ser medido. Explicar las marcas de un termómetro a un niño sin desarrollar primero alguna sensación y percepción de lo que mide no es sino otra manera de leer escalas. La altura de un niño, por ejemplo, da significado a la longitud, mientras que el peso no.

Como adultos, se da por supuesto que los niños perciben como lo hacemos nosotros. La mayoría de los niños tienen alguna experiencia que les permite desarrollar la percepción del mundo que les rodea. Sin embargo, esto se deja frecuentemente al azar **y** raramente se desarrolla de un modo sistemático. El profesor debería estar dispuesto para exponer a los niños a muchos estímulos y muchas propiedades de los objetos que eventualmente deben medir. Estas actividades son un comienzo fundamental para adquirir destreza en la medición.

Ejercicio
2. Citar otros ejemplos de percepción de cualidades de objetos.

2.2.2. Papel de la comparación

La percepción es el comienzo de la medición, y la comparación sigue a la percepción. Habiendo percibido alguna propiedad de algún objeto, nosotros, de un modo natural, lo comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad - si una vasija contiene una cierta cantidad de líquido, ¿tendrá esta otra una capacidad diferente? Cuando ponemos nuestra mano en una vasija de agua y la sacamos, experimentamos un cambio de sensación motivada por la evaporación del líquido. ¿Qué tenemos para comparar esta experiencia? ¿No sentimos lo mismo cuando nos bañamos? ¿Es la misma sensación que cuando abrimos el frigorífico o nos

[2] En este apartado y el siguiente incluimos un resumen del artículo de Inskeep, publicado en el "Yearbook de 1976" del N.C.T.M. que presenta una síntesis apropiada sobre las facetas a tener en cuenta en la enseñanza de la medición en la enseñanza básica.

aproximamos a un conducto de aire acondicionado?

La comparación de sensaciones es bastante natural. La comparación de objetos que pueden colocarse próximos es también una consecuencia natural de las percepciones. Al medir su altura, algunos niños pueden desear compararla con la de otros niños de la clase. Podemos, en este caso, indicar a los niños que se tiendan sobre grandes hojas de papel y dibujar los contornos de sus cuerpos, de tal modo que se puedan comparar. Esta actividad se hace sin ninguna habilidad numérica previa. La comparación de atributos de objetos conduce de un modo bastante lógico a la necesidad de un estándar que podamos aplicar sucesivamente. Podemos ahora ver la medida como la búsqueda de un estándar o referente.

Ejercicio:
3. Citar otros ejemplos de comparación de percepciones.

2.2.3. Búsqueda de un referente

La comparación de dos cosas es adecuada cuando deseamos hacer enunciados de equivalencia o no equivalencia "Tu eres más alta que yo", "Yo soy más alto que mi hermana pequeña". Esto sirve bien para comparaciones iniciales. Pueden incluso servir para comparaciones lógicas con terceras partes. "Si yo peso más que mi hermano y él pesa más que mi primo pequeño, entonces yo peso más que mi primo"**.** Sin embargo, esta aproximación a la comparación pronto resulta bastante inefectiva. Realmente necesitamos algún estándar de medida, un referente que pueda ser usado sucesivamente y al que podamos acudir en cualquier momento. El referente inicial que usemos no tiene que ser un referente estándar o que sea usado en todo el mundo. Por ejemplo, las partes del cuerpo son referentes fácilmente disponibles para medir longitudes.

Los referentes no estándares son útiles para comparación, pero deseamos llevar a nuestros niños más allá de lo obvio y enseñarles los referentes que pueden ser usados con más de una persona - nuestros estándares de medida.

Los estándares de medida tienen como mínimo dos funciones importantes. Primero, permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes áreas geográficas. Cuando nos trasladamos de un país a otro, podemos estar seguros de que las medidas que son estándares en nuestro país son estándares en otro también. Una extensión lógica de esta idea será adoptar estándares de medida utilizables para comunicar los mismos mensajes en todas las partes del mundo. Esto conduce naturalmente al Sistema Internacional de Unidades (SI), que ahora cumple esta función prácticamente en todo el mundo.

Ejercicio:
4. Citar otros ejemplos de búsqueda de referentes para la comparación de percepciones de cualidades de objetos.

2.2.4. La medición como un sistema

Con el SI, tenemos un sistema de unidades estándares relacionadas y que han sustituido por eso ampliamente a los estándares locales arbitrarios. Han sido precisos varios cientos de años para que el sistema encuentre amplia aceptación en el mundo, pero al final se ha conseguido.

En este punto de nuestra discusión, hemos tomado el proceso de medición en varios estadios - percepción. comparación, la necesidad de un referente, y finalmente, la necesidad de un sistema que organice y sistematice los referentes estándares. El mismo proceso puede ser aplicado a la experiencia educativa de los niños. Sugiere una secuencia de actividades a realizar. Los niños son conducidos desde una primera experiencia perceptual al punto en el que relacionan estas experiencias a otras propiedades y las conectan de un modo sistemático. En este punto final podemos decir que un niño ha aprendido a medir.

Hasta ahora hemos olvidado ciertas aspectos no secuenciales de la medición - los del dominio afectivo y los relacionados con la propia acción de medir. El componente afectivo de la medición y el acto de medir son dos principios que debemos considerar.

Ejercicio:
5. Inventar un sistema de unidades alternativo al actual para la magnitud peso.

2.2.5. La medición como una actividad afectiva

Nuestro trabajo con los niños en la medición producirá dos resultados:

(1) los niños apreciarán el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y

(2) los niños disfrutarán siendo capaces de medir por sí mismos.

La importancia de la medición en nuestra vida personal y en la sociedad es a menudo dada por supuesta. El científico conoce su importancia, y el ingeniero no puede prescindir de ella; pero el ciudadano medio a veces falla en apreciar el papel de la medida. Los niños deben aprender el papel importante que la medición juega en el progreso científico-tecnológico. Relacionar los programas de matemáticas con los estudios de ciencias y sociales ayuda en este desarrollo. Introducir algunas de las destrezas de medición en el arte y educación física es también útil. Pero los niños necesitan ver la medida como una parte importante de sus propias vidas. Necesitan ver que es importante medir con precisión un tablero para la construcción de una casa de madera. Necesitan la habilidad para leer un reloj si no quieren perderse su programa favorito de televisión. Los niños deben ser conscientes de las consecuencias de una medición chapucera o inefectiva en las actividades de construcción.

Otra característica afectiva del proceso de medición y más difícil de evaluar, es la satisfacción que un niño puede sentir de haber hecho un buen trabajo de medición. Los niños deben ser enseñados a medir de tal modo que desarrollen la confianza en sí mismos. Enseñar a los niños que ninguna medida continua es exacta debe ser logrado dándoles una experiencia adecuada en la lectura de instrumentos y escalas. Ser capaz de leer un nuevo tipo de escala es un logro satisfactorio.

Ejercicios:
6. Describir situaciones en las que la medición implique acción y otras en las que sólo sea una actividad mental.
7. Relacionar cantidades de magnitud a medir con la unidad más adecuada.
8 Proponer una actividad en la que el niño deba elegir la unidad de medida y el instrumento más adecuado.
9. Describir una secuencia de aprendizaje, según los principios que se acaban de ver, para estudiar la medida de una magnitud particular.
10. ¿Qué es una medida bien hecha? Citar ejemplos referidos a distintas magnitudes.
11. Citar los instrumentos de medida, para las distintas magnitudes, que todo ciudadano debe conocer.
12. Diseñar una actividad en la que se especifique:
Qué cosa medir.
Qué unidad utilizar, y
Qué procedimiento seguir.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

El esquema de trabajo en el aula debe ser similar para todas las magnitudes:

- Comparar y ordenar.
- Hacer estimaciones sobre la cantidad antes de medir.

- Elegir el instrumento más adecuado para realizar la medición.
- Considerar la unidad más adecuada a la magnitud que hay que medir, eligiendo entre los múltiplos y divisores que forman el sistema de medidas.
- Realizar la medición, es decir, comprobar cuántas veces está comprendida la unidad en la magnitud que medimos.
- Comparar la medición con la estimación realizada y valorar el error cometido.

Se propone, por tanto, un esquema de trabajo que requiere una organización de clase lo más cercana posible a un taller: sólo se puede aprender a medir midiendo y discutiendo las estrategias utilizadas, y ello pasa por la actividad y no solamente con lápiz y papel.

3.1. Actividades de percepción y comparación

La enseñanza de la medición debe apoyarse en las ideas intuitivas de los alumnos y en sus experiencias informales de medición para ayudarles a comprender los atributos que se miden y lo que significa medir. El estudio de la medida en la escuela elemental requiere el uso de materiales concretos para que los niños comprendan los rasgos de los objetos que se miden y dominen los instrumentos correspondientes. Los profesores en formación deben, por tanto, familiarizarse con estos materiales e instrumentos.

Un atributo medible es una característica de un objeto que se puede cuantificar. Los segmentos de recta tienen longitud, las regiones planas tienen área, los objetos físicos tienen masa. A medida que los alumnos progresan en el currículo desde preescolar a secundaria, el conjunto de atributos que pueden medir se amplia. El primer paso en el estudio de la medida será reconocer que los objetos tienen atributos que son medibles. Los niños de preescolar y primer ciclo de primaria comienzan comparando y ordenando objetos usando un lenguaje sencillo como más largo y más corto. La longitud debe ser el centro de atención en el primer ciclo, aunque también se puede iniciar el peso y el tiempo. A partir del tercer ciclo se comienza el estudio del área, el perímetro, volumen, temperatura y amplitud angular. En estos niveles aprenden que las medidas se pueden calcular usando fórmulas y no siempre se necesita obtenerlas de manera directa usando instrumentos de medida.

Los alumnos pueden explorar cómo cambian algunas medidas de los objetos al someterlos a ciertas trasformaciones. Por ejemplo, cortando en piezas una figura y reagrupándolas de distinta manera puede cambiar el perímetro, pero no el área.

Siguiendo el artículo citado de Inskeep (1976) incluimos a continuación actividades y recursos para el estudio de las magnitudes básicas en los distintos niveles de educación primaria: longitud, peso, tiempo, temperatura y capacidad. Las magnitudes amplitud angular, área y volúmen serán tratadas en el siguiente capítulo. Estas actividades deben ser la base para:

- una introducción a una medición socialmente útil y
- el desarrollo de una medición sofisticada en la ciencia y otros temas en los niveles de secundaria y post-secundaria.

Una restricción es que no todos los chicos están preparados para cierto tipo de actividades de medición. La investigación de Piaget y de sus intérpretes ha apoyado la idea de que hay estadios en la vida de los niños en los que son incapaces de comprender de un modo efectivo el proceso de medición. Puesto que cada niño se desarrolla según un patrón individual (esto se aplica tanto a los conceptos piagetianos como a otros aspectos de la individualidad) no es sólo prudente sino esencial que el profesor adapte el programa a sus propios alumnos y use su propio juicio acerca de cuándo comenzar una actividad.

Ejercicios

13. ¿A qué edad se puede abordar el estudio de cada una de las magnitudes?
14. Señalar actividades relacionadas con el principio de conservación de las distintas magnitudes

Actividad 1: Percepción y comparación de longitudes

Percepción de la longitud

1. Aproveche aquellas ocasiones en que los niños son medidos para su registro personal. Cuando la enfermera mide a los niños, haga que la clase discuta lo que se está midiendo. Los métodos utilizados para encontrar la medida pueden ser discutidos también. La clase puede incluso desear construir un dispositivo propio de medida. Pregunte a los niños sobre cómo pueden encontrar la altura de cada uno. Incluso si un niño no puede leer escalas o comparar números, participar en la actividad le ayudará para clarificar lo que significa la altura.

2. Pregunte a los niños si saben quien vive más lejos de la escuela, y cómo pueden determinarlo. Desarrollar la idea de distancia preguntando a los niños que digan cómo pueden encontrar quien vive mas lejos. Si es posible, use un paseo por el campo para desarrollar el concepto de distancia. Utilice visitas a los almacenes próximos, casas o puntos de interés como base para la discusión.

Comparación de longitudes

La mayoría de los adultos comparan la longitud de un objeto con otro, determinando si el número asociado con su medida es mayor a menor que el número correspondiente del otro objeto. En nuestros ejemplos de comparación de longitudes insistimos en las actividades táctiles y visuales y no las hacemos depender sólo de la habilidad para leer y ordenar correctamente números.

3. "¿Por qué las plantas de judías han crecido la mayor cantidad en la semana pasada? Esta pregunta puede servir de base para extenderse con la medida y la comparación.

4. Dibujar los perfiles de los niños y colocarlos en la pizarra en un mural. A continuación, hacer comparaciones: "¿Quién es el más alto? ¿El más bajo? ".

Actividad 2: Percepción y comparación de pesos

Percepción del peso

La percepción del peso corre paralela con la de la longitud puesto que ambas nociones son fácilmente asociadas con los seres vivos. El peso de los objetos puede ser sentido directamente. Sosteniendo dos objetos y comparando sus sensaciones tenemos una experiencia sensorial directa. Indicamos algunas actividades para desarrollar la percepción del peso.

1. Proporcione un número de objetos que varíen en volumen y peso y pida a los niños que los sostengan. Tome dos objetos y pídales que adivinen cuál es más pesado. Repita con varios niños, cada vez pregunte a la clase que adivine cuál es más pesado. Sostener cosas entre las manos da a los chicos experiencia sobre el efecto de peso que la gravedad produce en la masa de los objetos.

Comparación de pesos

Como en la comparación de longitudes no queremos que los niños sean obstaculizados por una dependencia de los instrumentos de medida o por una interpretación del orden de los números. El peso se "siente" mejor por medio de los músculos. Cuando un niño soporta un objeto, puede comprender (percibir) si es pesado. Las siguientes actividades ilustran esta idea,

1. Consiga piedras u otros objetos de pesos variados. Pedir al niño que los ponga en orden desde el más pesado al más ligero, de acuerdo con lo que siente o experimenta al manipularlos. Esta actividad puede

realizarse individualmente o en equipo.
2. Pedir a los niños que sostengan sus animales favoritos. ¿Qué animal es más pesado? Hacer una lista de los animales mostrando cuál es el más pesado y el más ligero y anotándolo en la pizarra. Alguna discusión podría acompañar a este ejercicio y varios niños podrían sostener a los animales.

Actividad 3: Percepción, comparación y medición del tiempos

Percepción del tiempo

Los niños no comprenden el tiempo y su paso hasta que alcanzan los niveles superiores de la escuela elemental. Incluso entonces, muchos niños tienen una débil comprensión del paso del tiempo y casi ninguna concepción del tiempo histórico. La percepción del tiempo como un atributo medible progresa a lo largo de los años escolares. Indicamos algunas actividades para ayudar en el desarrollo de esta percepción.

1. Use cualquier oportunidad para desarrollar la idea de los descriptores del tiempo: la clase comienza por la mañana; la comida separa la mañana de la tarde; los chicos vuelven a casa por la tarde. Usar el lenguaje temporal será una parte continua de la educación elemental.

2. Incluso aunque los niños no puedan ser capaces de leer o decir la hora, indíqueles las diferencias en la posición de las manecillas de un reloj. Haga dibujar la posición de las manecillas del reloj a una cierta hora, seguido de otro dibujo una hora después. Si esto es difícil de planificar en la clase, coloque una esfera de reloj sobre la pizarra y pida a un niño que ponga las manecillas como indica el reloj de clase. El dibujo de varios relojes con horas diferentes ayudará a los niños a visualizar el cambio que el paso del tiempo hace sobre la esfera del reloj.

3. Haga un registro de los días, meses, fechas y otros sucesos del calendario. Los nacimientos y ocasiones especiales ayudan a elevar el interés por leer las fechas, días y meses. Haga observar el cambio de año cuando los niños vuelven a la escuela después de las vacaciones de Navidad. Aunque estas actividades no contribuyan necesaria ni directamente a la percepción del tiempo por el niño, les prepara para el vocabulario que usarán para expresarlo. El paso del tiempo puede ser observado en los niveles superiores en términos de días, semanas y meses.

4. Medir el crecimiento de un animal doméstico y asociarlo con el tiempo. Hacer simples gráficos del peso y altura del animal y relacionarlo a los días y fechas de cada medida. Esto ayuda a relacionar el cambio en las características físicas del animal con el cambio del tiempo. Haga que los niños predigan el peso una semana posterior para adquirir experiencia adicional en la observación de los intervalos de tiempo. Posteriormente podrán comparar su predicción con el valor medido.

Comparación de tiempo

1. Dar a los niños una sensación del paso del tiempo relacionándolo con el calendario, leyendo en él y observando los sucesos naturales diarios. ¿Ha brillado hoy el sol? ¿Qué fecha es hoy? Usar estas cuestiones diariamente y señalarlas en el calendario. ¿Cuántos dias ha brillado el sol en esta semana? Estas y otras cuestiones pueden servir para estimular discusiones normales sobre la duración del dia y de la semana. Extienda la idea para desarrollar conceptos comparativos del mes, estaciones y año. Los niños de los niveles superiores necesitan estas comparaciones; los niños más jóvenes pueden iniciarse en ellas.

2. ¿Cuánto dura un segundo? ¿Un minuto? ¿Una hora? ¿Cuáles son los intervalos de tiempo de mayor duración? Estas cuestiones se pueden responder con simples experimentos o por observaciones. Un péndulo cuyo período tenga aproximadamente un segundo. El pulso de una persona, de 60 a 80 pulsaciones en un minuto. Medir el pulso de los niños, o dejar que individualmente se tomen el propio. Después comparar la duración de las pulsaciones de los niños con las obtenidas inmediatamente después

del recreo. Preguntar a los niños quién tiene 60, esto mide aproximadamente 1 minuto. Hacerles ver que son 60 golpes. Ayudados por un metrónomo, para controlar el ritmo, contar 60 golpes. Hacerles ver que esto mide aproximadamente un minuto. Comparar el péndulo con el pulso para dar al niño una idea de que más o menos 60 pulsaciones equivalen a un minuto.

Actividad 4: Percepción, comparación y medición de temperaturas

Percepción de la temperatura. Comparación

Los niños están expuestos a variaciones de temperatura desde sus primeras experiencias y sensaciones. Pueden asociar el calor con una estación o con un lugar, tal como el horno de cocina. Algunos niños se adaptan tan bien a los cambios de temperatura que parecen no notar las diferencias. Todos los niños deben tener algún concepto de temperatura como medida del calor. Indicamos algunas actividades diseñadas para desarrollar la percepción de la temperatura.

1. Coloque dos recipientes de agua, uno con suficiente hielo dentro para hacerlo más frío que el otro. Pida a un niño que meta una mano en el agua fría y la otra en la caliente. Pregunte qué siente y cómo lo describe. Use palabras "más frío", "más caliente" y frases como "la temperatura es más alta en esta vasija". Similarmente, haga que los niños pongan sus manos en una salida de aire caliente o frío y que comparen sus sensaciones de ese aire con el aire del resto de la habitación. Compartir y discutir tales experiencias puede conducir a una idea ajustada de la temperatura,

2. Deje a los niños experimentar con pequeños trozos de metal negro y rugoso y otros de metal reflejante colocándolos al sol, ¿cuál se pone más caliente? ¿Cuál se calienta más deprisa?

3.2. Actividades de estimación

Estimar una cantidad es el proceso de obtener una medida sin la ayuda de instrumentos, es decir, consiste en realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos. También podemos decir que es la "medida" realizada "a ojo" de una cualidad de un objeto[3]. Los procesos de estimación son muy frecuentes y útiles en las actividades que realizamos habitualmente. Este es un motivo para desarrollar esta destreza en la escuela; además, las actividades de estimación de medidas se deben considerar como uno de los componentes del proceso de medir, ayudando a los alumnos a entender los distintos aspectos que se ponen en juego.

Actividad 6. Estimación con objetos presentes o ausentes

a)
- Estimar el largo de la clase en metros, estando el metro presente y el alumno en clase.
- Estimar la altura de la puerta del pasillo del colegio en metros, sin el metro y desde el pasillo.
- Estimar la longitud del patio del colegio en metros, con el metro no presente y el alumno en clase.
- Estimar el ancho de las pistas del colegio en metros, con el metro no presente y el alumno en clase.

b)
- Señalar qué objeto, de entre los que se indican, mide 2 m de largo (estando el metro presente): un pupitre, una cama, un dormitorio.
- Indicar qué objetos de entre los señalados anteriormente miden 0'6 m de ancho, estando el metro no presente
- Construir un metro. Nombrar objetos de 3 m.
- Nombrar objetos que midan 1 m de longitud.

[3] Frias, Gil y Moreno (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Madrid: Síntesis.

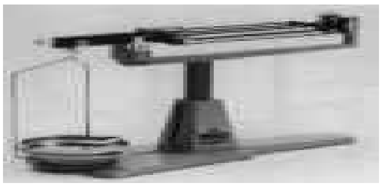
3.3. Actividades de medición

La importancia de hacer mediciones ha sido ya subrayada. Medición sin acción es meramente un tipo de rutina memorística o ejercicio intelectual. Los niños pueden memorizar el Sistema Métrico Decimal sin mucho esfuerzo. Sin embargo, queremos algo más que la habilidad para responder a unos tests estandarizados. Queremos que los niños tengan experiencias en todas las áreas básicas de la medición y que sean capaces de medir precisa y consistentemente. Tales experiencias deben ser sistemáticamente planeadas por el profesor y convertirse en parte integral del curriculum.

Los alumnos desde preescolar al 2º nivel deberían aprender a usar una variedad de técnicas, incluyendo el recuento y la estimación, e instrumentos tales como reglas, escalas y relojes analógicos. En los ciclos 2º y 3º se debe continuar el aprendizaje de estas técnicas y desarrollar otras nuevas aplicándolas a mediciones más complicadas, como puede ser la obtención y el uso de fórmulas para las áreas de figuras planas.

Las actividades de estimación de medias permiten centrar la atención de los alumnos en los atributos que se miden, el proceso de medición, el tamaño de las unidades y el valor de los referentes. De esta manera, la estimación de medidas contribuye al desarrollo del sentido espacial, así como conceptos y destrezas numéricas. Los estudiantes se darán cuenta que con frecuencia es suficiente con dar una estimación de una medida y que no es necesario usar instrumentos de medida en ciertas circunstancias.

Actividades 7:



Medición de pesos:

- Se proporciona a los niños una balanza, pesas de diversos pesos (1gr., 5gr, 10 grs. ¼ kg. etc). Se realizan actividades de estimación y medición de pesos:
- ¿Cuánto pesa mi libro? ¿Mis zapatos? ¿el balón de futbol? ¿Un vaso vacío? ¿Un vaso lleno de agua? ¿Un vaso lleno de arena?
- ¿Cuántas pesas tengo que poner en la balanza para equilibrar el peso?
- Use las ocasiones en que los niños son medidos para su fichero personal para desarrollar la idea de peso. Longitud y peso representan una característica propia del niño. Esto es una fuerte motivación cuando se utiliza adecuadamente. Dé a los niños los números que representan sus pesos. Ponga cuidado en la comparación de los pesos, pero si se hace de un modo natural y discretamente, un niño puede decir que es más pesado o ligero que otro.

Medición del tiempo

Cuando los niños sean capaces de decir la hora y leer el calendario, hágales que realicen varios experimentos que impliquen el registro de la hora y los sucesos. La comparación de los cambios sobre un intervalo de tiempo ayuda a establecer la idea de tiempo.

- Compruebe el tiempo de cocción de un huevo con un cronómetro para desarrollar el sentido de una duración breve de tiempo. El desarrollo de duraciones más largas es más difícil y complicado por el hecho de que el tiempo parece correr más lento o deprisa dependiendo de la ocupación del individuo durante el intervalo.
- La anotación de fechas, hacer programaciones de las horas de los programas de TV, y desarrollar actividades planificadas que impliquen intervalos de tiempo (tales como guiones de radio o TV) todo ello contribuye a la percepción individual del tiempo.

Como se ha observado previamente la comparación de intervalos de tiempo es difícil incluso para los adultos. Una hora viendo nuestro programa favorito de TV es mucho más corta que practicando sumas de números. Cuando los instrumentos de medida son invariables, una conciencia del paso del tiempo depende de los ritmos corporales (tener hambre, latidos del corazón, tener sueño), de los sucesos naturales periódicos (salida del sol, puesta del sol, salida de la luna), o de la regularidad con que se sucedan nuestras ocupaciones diarias (entrada y salida de la escuela, tiempo libre, hora de comer). Donde sea posible, estas medidas disponibles de comparación pueden ser usadas. La medida del tiempo con relojes y calendarios puede desarrollarse y refinarse si estas impresiones básicas de comparación están regularmente desarrolladas. Una clase sobre la medición del tiempo puede proporcionar la oportunidad de que los niños comparen intervalos de tiempo dados.

- ¿Cómo podemos medir el tiempo? Algunas respuestas podrían ser obtenidas directamente como las siguientes: un péndulo, un reloj de arena, con gotas de agua en una botella (dejar que gotee), con latidos del corazón, el movimiento de una sombra, botando un peso unido a un muelle. Comparar estos medios para medir el tiempo con los medios estándares y fijar intervalos en términos de sucesos físicos.

Medición de longitudes

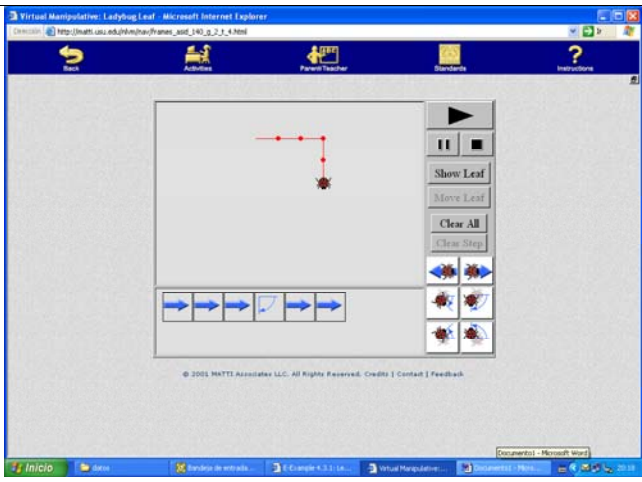
- ¿Cómo podríamos medir la altura? ¿Podemos usar bandas de papel o cuerda para mostrar cómo de alta es la planta? Señalamos que cuando esta actividad es realizada en los niveles más inferiores, la soltura (o buena disponibilidad) de los niños para la medida no está totalmente desarrollada y la supervisión de los adultos puede ser muy necesaria para ayudar a los niños a obtener medidas precisas. Los niños pueden empezar con cuerdas o con papel en cualquier orden, y pueden hacer una gráfica de sus resultados.
- Medir la longitud de la clase con pies, con baldosas, con el metro. ¿Cuántos centímetros tiene una baldosa? ¿Un pie?
- Medir la altura de varios niños y anotarla junto a su silueta. Escribir el nombre de los niños junto a su altura. Hacer comparaciones observando estas anotaciones.

Medición de temperaturas

- Haga un registro diario del tiempo atmosférico y compare las temperaturas anotadas. Esto ayuda a que los niños se familiaricen con el termómetro. Comparar y discutir diferencias de temperaturas en las diferentes partes del país.
- Haga que los niños estimen la temperatura de una vasija de agua. Compare las estimaciones con la temperatura medida.

3.4. Recursos en Internet

1. Experimentación con unidades de medida y formas geométricas
http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.3/index.htm



Unos iconos muestran diferentes unidades de longitud y dirección que pueden usarse para describir los movimientos de una araña en un plano.

Una vez programada la secuencia de movimientos se puede experimentar el efecto conseguido.

También pueden realizarse los movimientos dentro de un laberinto.

Estas actividades estimulan la orientación espacial, descomposición analítica de movimientos en el plano y percepción de las unidades de longitud y amplitud angular.

2. Interactive Units converter:
http://www.convert-me.com/en/

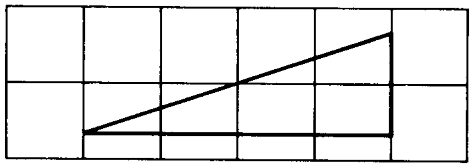
Para una variedad de magnitudes proporciona la conversión entre diferentes unidades de medida, incluyendo medidas antiguas o medidas en diferentes sistemas internacionales.

Permite dar a conocer otras medidas diferentes de las convencionales y también comprobar los cálculos realizados al transformar unidades de medida.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

A continuación incluimos algunas tareas descritas en Dickson, Brown y Gibson (1984) que han sido tomadas de distintas investigaciones.

1. Conservación de la longitud

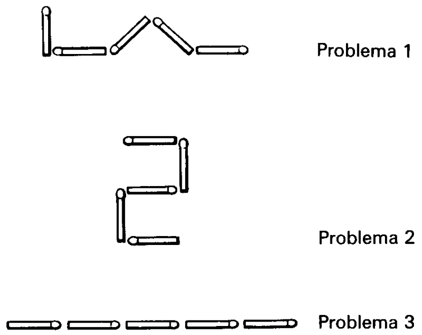


¿Cuál es la longitud del lado inclinado?

- 4 cuadros
- más de 4 cuadros
- menos de 4 cuadros

El porcentaje de respuestas correctas a los 12 años es el 38% y el 40% a los 13 años. La respuesta más frecuente es que la longitud es 4 cuadros.

2. Comparación de longitudes



Se pregunta a los niños cuál de las tres figuras tiene mayor longitud.

Hasta los 6 o 7 años los niños piensan que la tercera figura es la que tiene mayor longitud.

3. Conservación del peso. Se toma una bola de plastilina redonda y se pregunta si pesa lo mismo cuando se estira en forma de salchicha.

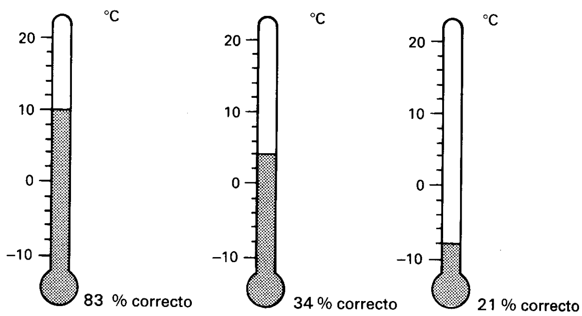
Se toma un juego de muñecas rusas y se pregunta cuándo pesa más, si cuando todas las muñecas se meten una dentro de otra o si cuando se sacan unas fuera de otras.

- A los 7 años y medio el 57 % de los niños admite la conservación del peso.
- A los 12 años el 86% de los niños admite la conservación del peso.

4. Comparación del peso. Se da a los niños una balanza y tres cajas de igual forma y volumen y diferente peso. Se pide ordenar las cajas por peso.

- A los 7 años y medio el 31 % de los niños es capaz de hacer la tarea.
- A los 12 años el 72% de los niños es capaz de hacer la tarea

5. Lectura del termómetro



La lectura de temperaturas sobre cero es más sencilla que las temperaturas bajo cero.
Es mucho más sencillo si la lectura coincide con un valor rotulado en la escala.
Los datos corresponden a niños de 11 años.

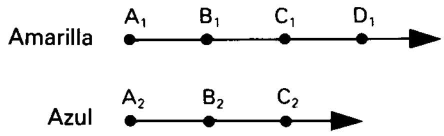
6. Ordenación de acontecimientos

Se muestra una secuencia de fotografías de un acontencimiento que el niño ha observado previamente (una botella llenándose, un objeto cayendo). Se pide a los niños que coloquen las fotografías en el orden en que han ocurrido.

Esta es una experiencia realizada por Piaget, quien informó que un 15% de su muestra de niños no hacia la tarea correctamente a la edad de ocho años

7. Duración de intervalos temporales

Se tienen dos muñecas, una amarilla y otra azul que comienzan a andar en los puntos A1 y A2, respectivamente, al mismo tiempo. Se detienen en el mismo instante, señalado por un "clic" audible. Como la velocidad uniforme de cada muñeca es diferente, ambas recorren distancias distintas.



- ¿Se pararon al mismo tiempo?
- ¿Cuál se paró primero?
- ¿Cuál se movió durante más tiempo?

En experiencias realizadas por Lowell y Slater el porcentaje de respuestas correctas a estas cuestiones fue del 13% con niños de 5 o 6 años y sólo del 43% en niños de 9 y 10 años.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con la medida directa de magnitudes.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos de primaria.

5.2. Análisis de experiencias de enseñanza de la medida de longitudes

En el Anexo incluido a continuación (*La medida en el ciclo medio*, N. Brousseau), se describen diversas actividades de enseñanza de la medida directa de longitudes. Realizar un lectura detallada de este documento, discutir en pequeños grupos y elaborar un breve informe, respondiendo a las siguientes cuestiones:

Cuestiones:
1. La longitud de las bandas de cartulina preparadas como material para la actividad es una variable didáctica (el profesor la puede cambiar y ello influye en los conocimientos puestos en juego). ¿Por qué se han elegido las bandas con las longitudes dadas? ¿Qué consecuencias tendría el cambio de estas longitudes?
2. ¿Por qué se divide cada grupo de 4 alumnos en dos subgrupos, uno de emisores y otro de receptores? ¿Qué consecuencia tiene esa organización en términos cognitivos?
3. ¿Por qué la maestra no acepta que los mensajes de los emisores se den en cm y mm?

4. ¿Por qué dice la maestra que aceptará una diferencia en las bandas recortadas menor de 5 mm?
5. ¿Qué otros tipos de mensajes se puede esperar que elaboren los niños que realizan la experiencia?
6. ¿Para qué conocimientos consideran los autores de la experiencia que el uso prematuro del doble decímetro (con marcas de cm y mm) es un obstáculo?
7. ¿Qué ventajas aporta el uso de bandas de cartulina en una primera fase del aprendizaje de la medida de longitudes respecto de las unidades antropométricas y de las unidades legales?
8. Después de la actividad 2 de discusión de los mensajes los autores de la experiencia deciden dejar el estudio de la longitud y pasan a estudiar el peso. Explica las razones de esta decisión.

ANEXO: La medida en el Ciclo Medio (Brousseau, N., 1992). *La medida en el ciclo medio. Informe de actividades desarrolladas en el IREM de Burdeos. Documento para los maestros y formadores*. [Actividades sobre la medida de longitudes. Traducción de J. D. Godino].

Actividad 1: Medida de longitudes: juego de comunicación

Esta actividad se desarrolla en dos clases paralelas del curso medio, 1er año: $CM1_A$ y $CM1_B$.

I. MATERIAL

- bandas de 1’5 cm aproximadamente de anchura de cartulina de los siguientes colores y longitudes:
  - 2 bandas verdes de 64 cm de longitud;
  - 2 bandas verdes de 57 cm;
  - 2 bandas amarillas de 42 cm;
  - 2 bandas amarillas de 40 cm;
  - 2 bandas azules de 32 cm;
  - 2 bandas azules de 51 cm.
- Un número suficientemente grande de bandas de colores verde, amarillo y azul de 1’5 cm de ancho de la misma cartulina que las anteriores de unos 70 cm de longitud.
- Bandas “patrón” de 5 mm de ancho recortadas en cartulina gris (o marrón), todas iguales de 12 cm de longitud, y marcadas con la letra “u”. Se debe disponer de un número grande de estas bandas (que serán usadas como unidades de medida)
- Hojas blancas para escribir los mensajes.

II. ORGANIZACIÓN DE LA CLASE

La clase se divide en equipos de 4 niños. Cada equipo comprende 2 emisores y 2 receptores que estarán separados (aunque van a trabajar coordinados). Al comienzo se da una consigna y se reparte el material:

1. <u>Consigna:</u>“Voy a dar una banda de color a los emisores. Unos tendrán una banda verde, otros amarilla, y otros azul. Deberán escribir un mensaje en el que indicarán la medida de la longitud de esta banda utilizando este “patrón” (la maestra muestra la banda unidad gris o marrón). Todos estos patrones tienen la misma longitud. (La maestra muestra esta igualdad superponiendo dos de ellas). Los mensajes serán enviados a los receptores quienes deberán construir una banda de la misma longitud que la de los emisores”.
2. <u>Distribución del material:</u> La maestra distribuye a cada grupo de emisores una banda de color (bien verde, amarilla, o azul) y dos bandas “patrón”.

III. DESARROLLO

1. <u>Primera fase:</u> Los grupos de emisores comienzan la actividad. Mientras esperan recibir los mensajes, los receptores hacen individualmente un ejercicio de matemáticas (operaciones, por

ejemplo) que ha sido preparado por la maestra.

a) Comportamientos observados durante la realización de esta fase. Antes de comenzar, los niños preguntan a la maestra si aceptará una pequeña diferencia de longitud (esto se explica porque en la clase se había hecho unos 3 meses antes una actividad de medida de segmentos en la que la maestra había exigido mucha precisión en las medidas y los niños se recuerdan de ello). Desde el comienzo del trabajo, tratan de traducir las longitudes de las bandas (las bandas del color que se les ha dado para que midan con el patrón) a las unidades que conocen por el uso del doble decímetro: centímetros y milímetros.

La maestra les explica:

- que aceptará una diferencia de longitud materializada por una pequeña banda recortada de menos de 5 mm de longitud (3 o 4 mm);
- que no deben utilizar los dobles decímetros, sino únicamente el material que se les ha distribuido;
- por tanto, ningún mensaje se puede expresar en centímetros o en milímetros.

  A pesar de esto, en muchos grupos, los niños tratan de apreciar las longitudes en centímetros y milímetros. Algunos incluso dibujan graduaciones aproximadas sobre las bandas "patrón".

En la clase A, los niños tienen muchas dificultades: algunos llevan el patrón sobre su banda, pero cuando queda "un pequeño trozo" por medir, no tienen la idea de plegar el patrón, y a veces miden la parte restante con la anchura del patrón.

Esta primera fase no concluye con la realización de los mensajes pedidos y a la construcción, por los receptores, de bandas de la misma longitud. En cambio, en la clase B, algunos grupos tienen la idea de plegar el patrón en 2 o en 4.

b) Concertación entre emisores y receptores: Antes de abordar la segunda fase (cambio de emisores y receptores) y como consecuencia de este fracaso, la maestra de la clase A propone a los emisores y a los receptores que se pongan de acuerdo para tratar de buscar una estrategia.

Es entonces cuando los niños preguntan si pueden plegar los patrones y trazar encima marcas.

La maestra responde que pueden hacer todo lo que quieran con los patrones y que podrán disponer de tantos patrones como quieran.

2. <u>Segunda fase:</u> Los emisores y los receptores se separan después de intercambiar los papeles.
   La maestra distribuye a los nuevos emisores las otras bandas verdes, amarillas y azules. Los emisores redactan los mensajes (ponen secuencialmente los patrones, trazan marcas). Una vez terminados los mensajes se transmiten a los receptores.
   Los receptores construyen las bandas correspondientes. Los grupos se reúnen a continuación para verificar (mediante superposición) si la banda construida tiene la misma longitud que la del emisor.

<u>Observación</u>: No hay intercambio de patrones. Solo se transmiten los mensajes.

<u>3. Ejemplos de mensajes obtenidos en el transcurso de la actividad</u>

Clase A, 1ª fase: "2 varillas pequeñas marrón, una varilla pequeña no completa, hay que eliminar 3 o 4 cm"; "hay que poner 2 varillas y otra más a la que le falta un poco al final"

Clase B: "2 u más 3 cuartos, se hace un cuarto doblando u en cuatro", 3 veces u, mitad, mitad de la mitad, la mitad de la mitad de la mitad"

Clase A, 2ª fase después de la concertación: "hay que poner 3 u, una a continuación de otra y la mitad exactamente de una u (borde con borde)", "hay que poner 5 varillas y plegar una varilla pequeña que se llama u en partes iguales"

<u>Observación</u>: Esta lista de mensajes no es exhaustiva. Hemos elegido sólo algunos ejemplos. Es probable que los mensajes que se obtengan en otra clase sean diferentes.

Actividad 2: Medida de longitudes (discusión)

I. MATERIAL

- El mismo material que el usado en la actividad 1ª (bandas de colores y patrón-unidad)
- Mensajes de los alumnos.

II. DESARROLLO

El estudio de los mensajes se hace bajo la forma de una discusión colectiva.

La maestra pregunta a los niños: ¿Qué grupos son los que no han tenido éxito?, y propone a continuación comenzar a examinar los casos en los que ha habido dificultades. Los niños que no han tenido éxito leen sus mensajes, los cuales son escritos en la pizarra por la maestra.

Estos mensajes se discuten por el conjunto de los niños. Se presentan dos casos:

- El mensaje es correcto y han sido los receptores quienes lo han comprendido mal y han construido mal la varilla: en este caso los emisores justifican su mensaje realizando las manipulaciones (con la ayuda de las varillas) delante de los niños.
- O bien el mensaje nos es correcto y la maestra trata de que los niños encuentren el fallo.

Los errores son puestos en evidencia:

- la anchura del patrón ha sido utilizada como unidad;
- las medidas no son lo suficiente precisas debido a que los pliegues están mal hechos.

III. RESULTADOS

Al final de esta secuencia, la maestra introduce la palabra "unidad" para nombrar a la varilla patrón, y los niños, después de discutir, se ponen de acuerdo para enunciar las dos ideas siguientes:

- Para comunicar la medida de las varillas y para construirlas es necesario una unidad de medida que se pueda trasladar.
- Es necesario usar unidades cada vez más pequeñas para medir con la mayor precisión posible. Estas unidades se obtienen mediante doblado de la varilla patrón.

Observación: Después de esta segunda actividad, hemos tomado la decisión de continuar el trabajo sobre la medida utilizando un material completamente diferente: material de pesada con la balanza de platillos (Roverbal). Esta decisión puede parecer sorprendente ya que aún no se han explotado todas las posibilidades que permite el trabajo con las longitudes. Esta elección se hace por las siguientes razones:

- En primer lugar, los niños que utilizan el doble decímetro desde el curso preparatorio, no comprenden la utilidad de una actividad de medida de longitudes sin este instrumento. Han tenido muchas reticencias de utilizar el patrón proporcionado, no graduado, en el sistema habitual.
- Además, estos niños no se plantean la cuestión de la significación de una medida y no admiten por tanto que se pueda utilizar un objeto cualquiera (el pulgar, el pie, la varilla, una cuerda, ...) para medir una longitud.

Para superar estas dificultades, hemos escogido una actividad sobre la medida de masas que permite:

- introducir la balanza de platillos que no es un instrumento familiar para los niños (conocen esencialmente las balanzas automáticas);

utilizar esta balanza sin las masas marcadas sino con unidades elegidas por la maestra: diferentes tipos de clavos y plaquetas.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, N. et al. (1992). *La mesure en cours moyen, è^{re} année; compte rendu d'activites*. Irem de Bordeaux. [La medida en el ciclo medio, 1er año; informe de actividades. Traducción de J. Díaz Godino]

Chamorro, C. y Belmonte, J. M. (1988). *El problema de la medida*. Madrid: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas.* Barcelona:

MEC-Labor.
Frias, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida . Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]
Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.
Roanes, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Anaya.

V.

Didáctica de la Medida de Magnitudes para Maestros

Capítulo 2:

MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

El desarrollo de fórmulas para calcular la medida de magnitudes geométricas de manera indirecta es de gran utilidad práctica, ya que la medida directa de tales magnitudes será difícil o imposible de realizar en la mayor parte de los casos. Por ejemplo, es fácil medir las tres dimensiones de una caja con una regla, pero no es fácil medir el volumen de la caja de manera directa. Además el proceso de búsqueda de las expresiones correspondientes es una actividad matemática de gran valor en sí misma al requerir relacionar distintos conceptos y técnicas. Por este motivo la obtención y uso de fórmulas para la medida de longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos se incluye en las propuestas curriculares, incluso desde el nivel de primaria.

Es recomendable que los niños no usen nunca las fórmulas sin que hayan participado en el desarrollo de dichas fórmulas. El desarrollo de las fórmulas por los propios niños es una actividad mucho más importante y significativa que la introducción de números en tales fórmulas. Pero en cualquier caso los alumnos deben comprender previamente el rasgo o característica de los objetos cuyo tamaño se mide mediante las fórmulas (longitudes, perímetros, áreas y volúmenes).

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

En el bloque temático sobre la medida (información cuantitativa sobre los objetos) el DCB incluye las siguientes referencias a las magnitudes geométricas.

Hechos, conceptos y principios

2. El perímetro, el área y el volumen de las figuras como expresiones cuantitativas de su tamaño.

3. Las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal.
   - Longitud.
   - Superficie.
   - Capacidad.

6. La unidad de medida para la medición de ángulos: el grado.

Procedimientos

2. Construcción de instrumentos sencillos para efectuar mediciones directas de longitudes, superficies y capacidades.
3. Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, de manera exacta y aproximada.
6. Transformación, comparación y equivalencias de las unidades de medida utilizando los algoritmos de cálculo correspondientes.
7. Utilización de los algoritmos para calcular áreas de rectángulos y triángulos.

Remitimos al lector a la sección de Orientaciones Curriculares del tema correspondiente a Magnitudes y Medida para tener una visión completa del currículo propuesto para el bloque temático de la medida, incluyendo los aspectos generales sobre la medición, la mención a otras magnitudes como el peso y el tiempo, así como sobre los contenidos actitudinales.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[1]

[1] National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.

En los Principios y Estándares 2000 se incluye de manera explícita en el primer ciclo el estudio de las magnitudes geométricas *longitud, área* y *volumen*, aplicándoles los procesos de,

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- comprendiendo cómo medir usando unidades no estándar y estándar;
- seleccionando la herramienta y unidad apropiada para medir el atributo que se desea medir.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones, realizado las siguientes actividades:

- medir usando colecciones de objetos de igual tamaño, como clips puestos correlativamente;
- medir un objeto usando como unidad otro de menor tamaño, como la longitud de una habitación usando un metro;
- usar herramientas de medir,
- desarrollar referentes comunes de medida para hacer comparaciones y estimaciones.

Estos mismos objetivos se desarrollan en los niveles 3 a 5, ampliados a la amplitud angular, en la forma siguiente:

Comprender los atributos medibles de los objetos y las unidades, sistemas y procesos de medición:

- comprender atributos de longitud, área, peso, volumen y amplitud angular y seleccionar el tipo apropiado de unidad para medirlos;
- comprender la necesidad de medir con unidades estándares y familiarizarse con el sistema métrico.
- hacer conversiones entre unidades, como pasar centímetros a metros;
- comprender que las mediciones son aproximadas y cómo afecta a la precisión el cambio de unidades;
- explorar lo que sucede a las medidas de una figura bidimensional como el perímetro y el área cuando se cambia la forma de algún modo.

Aplicar técnicas apropiadas y herramientas para realizar mediciones:

- desarrollar estrategias de estimación de perímetros, áreas y volúmenes de formas irregulares;
- seleccionar y aplicar las unidades estándares y los instrumentos de medida de longitud, área, volumen, peso, tiempo, temperatura y amplitud angular;
- seleccionar y usar patrones de comparación para estimar medidas;
- desarrollar, comprender y usar fórmulas para encontrar el área de rectángulos, triángulos y paralelogramos;
- desarrollar estrategias para determinar áreas superficiales y volúmenes de sólidos rectangulares.

Ejercicio:

1.Analizar las diferencias y semejanzas de las orientaciones curriculares propuestas para el estudio de la medida en,

- Diseño Curricular Base del MEC
- Las orientaciones curriculares de tu Comunidad Autónoma
- Principios y Estándares 2000 del NCTM.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

2.1. Conservación del área

El principio de conservación tiene que ver con la invariancia de una cierta cualidad, en un determinado objeto, cuando se realizan determinadas transformaciones sobre dicho objeto.

En lo que se refiere a la superficie, es el convencimiento de que, por ejemplo, si cortamos un folio en varios trozos la cantidad de papel no ha cambiado. La justificación, de que no ha cambiado, podemos encontrarla en el hecho de que si junto los trozos vuelvo a tener el folio inicial; por esta razón vemos que los conceptos de conservación y reversibilidad guardan entre sí una estrecha relación y que, en cierta forma, se justifican entre si.

Según Piaget pueden considerarse varias etapas:

- En el primer estadio, hasta los cinco años, no han desarrollado esa capacidad en el ejemplo del folio y dicen que hay más papel en los trozos.
- En el segundo estadio, entre los cinco y los seis años, hay respuestas diversas.
- Hacia los siete años, tercer estadio, es cuando los niños perciben la equivalencia y alcanza, por tanto, el principio de conservación de la superficie.

El hecho de establecer una fuerte relación, a veces casi de tipo biunívoco, entre área y perímetro, en el sentido de que si una cambia la otra también lo hace necesariamente, en el mismo sentido y en la misma proporción, es lo que en un momento dado puede facilitar o entorpecer la adquisición de la conservación de una u otra magnitud. Quizás este hecho pueda explicar, al menos en parte, la existencia de un cierto paralelismo, según Piaget, entre la adquisición del principio de conservación de la longitud y el de conservación del área.

A partir de ese momento, en que tiene sentido para el niño la equivalencia de superficies sometidas a ciertas transformaciones, pueden descomponerse y recomponerse de diferentes maneras las distintas figuras geométricas tanto para trabajar y desarrollar el concepto de medida como para, por ejemplo, la obtención de las fórmulas del área de las distintas figuras y es fundamental para calcular el área de figuras irregulares.

Actividades 1:

1. Se les da a los niños dos cartulinas iguales de un determinado color; se les da una serie de fichas de un color diferente y se les dice que coloquen el mismo número de estas fichas en cada una de las cartulinas y se les pide que digan donde hay más cartulina visible. Una variante de esta actividad sería utilizando fichas de tamaños muy dispares y colocar un número diferente de fichas en cada cartulina.

2. Dadas dos cartulinas iguales, a una de ellas se le corta un trozo que se le adjunta en un lugar distinto al que tenía y se pide al niño que diga cual tiene mayor superficie. Admite variantes en cuanto al número de trozos que se cortan y al lugar en que se añaden.

2.2. Conservación del volumen

Tenemos que citar el ya clásico experimento, llevado a cabo por Piaget, en el que trasvasa líquidos de un recipiente a otro que tiene diferente forma, para concluir que habrá que esperar a los siete u ocho años para que el niño reconozca que hay la misma cantidad de líquido, independientemente de la forma que tenga el recipiente o de la altura que alcance en cada uno de ellos.

Hay otros autores que, no planteando diferencias apreciables en lo esencial, hacen consideraciones complementarias. Lovell y Ogilvie encontraron que, para muchos alumnos de primaria, el volumen de un cuerpo está relacionado con su peso. Freudenthal insiste en que habría que hacer más énfasis en las distintas transformaciones que dejan invariante el volumen. Son numerosos los autores que relacionan la tardía adquisición de la conservación del volumen, por parte del niño, con la escasez de experiencias que sobre esta magnitud se desarrollan en la escuela.

Actividades 2:

1. Se presentan al niño dos recipientes con forma diferente, uno de ellos contiene una cierta cantidad de líquido y el otro está vacío; se le pide que vierta el líquido de un recipiente en el otro y que diga si había más líquido antes o ahora. Una variante sería dar al niño dos vasos iguales llenos de agua, decirle que vacíe uno en cada uno de los dos recipientes antes descritos y se le pide que digan en cuál de ellos hay más agua.

2. Se presentan dos recipientes de diferente forma o tamaño, uno de ellos contiene una cierta cantidad de líquido, y se le pide al niño que diga el nivel que alcanzará ese líquido en el otro recipiente.

3. Dado un recipiente, y varios montoncitos de arena, se le pide al niño que diga cuál de ellos fue el resultado de vaciar dicho recipiente.

Otras actividades interesantes pueden ser las de empaquetado y, por ejemplo, el uso de pequeños bloques cúbicos para construir estructuras más complejas.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Al igual que en el tema anterior sugerimos actividades de percepción, comparación y medición para las magnitudes geométricas estudiadas. La medida directa de longitudes ha sido incluida en el capítulo 1.

3.1. Amplitud angular y su medida directa

La necesidad de la magnitud amplitud angular es más evidente en los niveles superiores. Excepto para leer la hora, pocas medidas angulares se encuentran en los niveles inferiores.

La percepción y comparación están estrechamente relacionadas en todas las primeras fases de la medida de ángulos. Puesto que esperamos que la comparación de ángulos sea hecha en niveles superiores, podemos tratar con ambas, percepción y comparación al mismo tiempo. Cuando se les dé tareas simples de medición de ángulos preguntarles a los niños sobre el orden, de mayor a menor. Preguntarles que estimen formas, comprobando con el transportador y repita el proceso para desarrollar un sentido de comparación de la medida angular.

Listamos a continuación algunas actividades simples para introducir la percepción y medida de ángulos[2].

Actividades 3: Percepción y medida de ángulos

1. Los niños que pueden leer la hora y tienen algún conocimiento de las fracciones pueden usar la esfera del reloj para una introducción a los ángulos. Proporcione a la clase varias hojas

[2] Inskeep (1976).

representando esferas de reloj, con la única indicación de los números. Pida a la clase que tracen una línea desde el centro de uno de los relojes a la posición de las 12. Trazar a continuación una segunda marca sobre la misma esfera indicando la posición de la aguja grande si debe apuntar a las 6 horas. "Si la aguja grande se mueve desde las 12 hasta las 6, qué fracción del recorrido total ha realizado?" ¿"Qué forma geométrica se representa por la primera y la última posición de la manecilla grande? Repita el procedimiento con la posición inicial en las 12 y la final en las 3. "¿Qué figura geométrica forman las dos posiciones? (ángulo recto, "esquina"). "Si consideramos un giro alrededor de la esfera como una vuelta, ¿qué fracción de una vuelta recorre la aguja grande cuando se traslada desde las 12 a las 3? Pruebe otras posiciones y otros ángulos. Pida a los niños que hagan un registro de todos las posiciones iniciales y finales para que el ángulo formado sea recto. Adapte las preguntas y materiales a una actividad colectiva o a un ejercicio que puede ser hecho individualmente.

2. Use un simple ejercicio sobre cómo medir ángulos con un transportador para desarrollar la percepción de la medida angular. (Esta lección también sirve para otros objetivos y se adapta mejor a los niveles superiores). Muestre a los niños cómo medir algunos ejemplos repetidos de varios ángulos desde 0 a 180 grados con el transportador. Un transportador grande para usar en la pizarra puede clarificar esta actividad.

3. Haga que los niños midan ángulos de varias figuras planas para refinar su percepción (y comparación) de varias medidas angulares. Dé a los niños un conjunto de triángulos y pídales que midan los ángulos de los distintos triángulos. Registre las medidas para cada uno." ¿Cuál es la suma de los ángulos en cada triángulo? ¿Hay alguna ley general? ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de un rectángulo? ¿de un cuadrilátero? ¿de un pentágono?

3.2. El área y su medida directa

La percepción del área se puede desarrollar a partir de la idea primitiva del recubrimiento de objetos. El área es un medio conveniente para comunicar cuánta superficie plana puede ser cubierta. Puede ser ampliada para recubrir recintos no planos. Comparar áreas es complicado porque los datos que directamente se observan son engañosos. Como adultos, nosotros podemos mirar un triángulo, un círculo y un cuadrado y no estar seguros si tienen distinta o igual área. Podemos hacer estas formas con la misma extensión y aparentar, no obstante, un área diferente.

La comparación es muy complicada para el niño porque no tiene aún desarrolladas las estructuras cognitivas necesarias para hacer las comparaciones aún cuando las tareas parezcan simples a un adulto. Las siguientes actividades son ilustrativas y presuponen participación del alumno.

Actividades 4: Percepción de áreas

1. La mayoría de las clases tienen tablones de anuncios o murales que sirven como una excelente ayuda visual. Use estos tableros como superficies para recubrir. "¿Cuánto papel se necesita para recubrir el tablero?" "¿Cuántos trozos de papel coloreado será necesario para el contorno?"

2. Dé a los niños algunas formas cerradas planas y una colección de cuadrados, círculos y rectángulos de papel. Pídales que recubran cada forma con las distintas piezas de papel. Registre los resultados, haga que un niño registre la información del grupo o sus propios resultados. Discutan sobre lo que se está haciendo y sobre los resultados. "¿Qué forma trabaja mejor? ¿Por qué?"

3. Dé a los niños cajas cilíndricas o botes y pídales que determinen cuanto papel se necesitará para recubrir las superficies. Esta actividad es particularmente apropiada durante la Navidad o en días que preceden al día de la Madre, fechas en las que pueden hacer pequeños objetos para regalo, tales como lapiceros. El fondo circular del cilindro puede ser también recubierto.

4. Una "imprenta", hecha con una patata, puede servir como otra oportunidad para desarrollar alguna idea sobre el recubrimiento. Corte patatas en mitades y haga que los niños preparen diseños en la superficie cortada rellenándolos de tinta. Pida que experimenten con su imprenta de patata para recubrir completamente un trozo de papel sin que haya solapamientos. Indíqueles que anoten el número de impresiones necesarias para recubrir el papel. Quizás observen que diseños grandes sobre la "imprenta" requieren menos impresiones que los pequeños. Ayude, también, a que el niño observe que una figura que no divide el plano en mosaicos (el disco es un buen ejemplo) deja agujeros que no son cubiertos.

Actividades 5: Comparación de áreas

1. Construir una serie de formas de áreas variadas usando papel cuadriculado. Pedir a los niños que las ordenen de mayor a menor área. Después que las han ordenado, pedirles que cuenten los cuadrados que hay en cada forma y comprobar sus estimaciones. Poniendo la medida en el reverso de cada figura podrá utilizarse esta colección como un módulo utilizable en diversas ocasiones. Comparar formas rectangulares, triangulares, curvas e irregulares para hacer una serie de actividades.

2. Usar el geoplano para desarrollar la comparación de áreas. Dar al niño un conjunto particular de formas y preguntarles cuál es la forma de mayor área. Construir figuras en el geoplano y contar los cuadrados para medir el área.

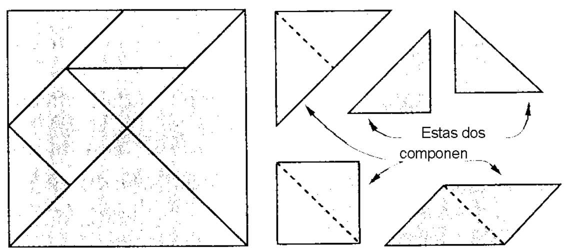
3. Trazar en papel cuadriculado una mano de cada uno de los niños. ¿Qué mano es la de mayor área? Si los niños cuentan los cuadrados terminan observando si su estimación es correcta. Repetir con el pie o con los zapatos

Cuando se comparan dos áreas, la consideración adicional de la forma origina dificultades que no están presentes en el caso de longitudes. La realización de actividades de comparación de áreas tiene como fin que los alumnos discriminen entre el tamaño (área) y la forma, la longitud y otras dimensiones. Un rectángulo muy alargado y estrecho puede tener menos área que un triángulo con lados más pequeños. Esto resulta particularmente difícil para los niños pequeños, como también que el área se conserve cuando las diversas partes de una figura plana se recomponen para formar otra figura diferente.

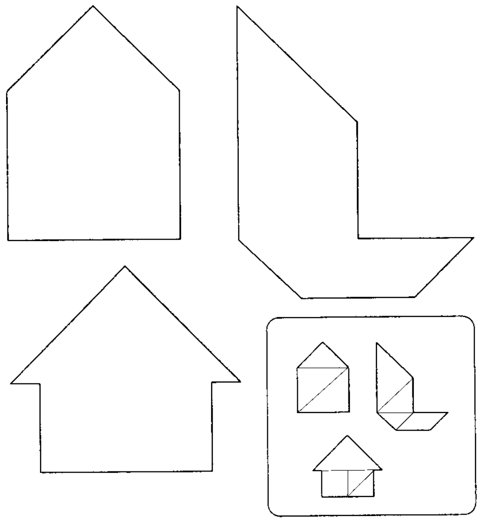
La comparación directa de dos áreas es casi siempre imposible excepto cuando las formas tienen alguna dimensión o propiedad común. Por ejemplo, dos rectángulos con el mismo ancho se pueden comparar directamente, como también cualquier par de círculos. Pero en estos casos realmente no se comparan las áreas sino la longitud por la que difieren. Los tipos de situación que se requiere diseñar se basarán en la descomposición y recomposición de figuras. Esta idea no es, sin embargo, obvia para los niños pequeños. Las piezas del tangram proporciona buenas oportunidades para investigar los conceptos de tamaño y forma.

Actividad 6:

Dibujar el contorno de varias figuras usando las piezas del tangram, como se indica en la figura adjunta (derecha). Preguntar a los alumnos qué figuras son de mayor, menor o igual área ayudándose de las piezas del tangram. Las figuras se pueden duplicar en cartulina y los niños pueden trabajar en grupos. Hacer que expliquen sus conclusiones.



Las 7 piezas del tangram



Solución

Uso de unidades para medir áreas

Aunque los cuadrados son las unidades más cómodas para medir las áreas, cualquier tesela o baldosa que rellene convenientemente la región del plano que se desea medir se puede usar. Algunas piezas que se pueden reunir fácilmente en cantidad suficiente para las actividades de medición de áreas son:

- Recortes en papel o cartulina (poster) de cuadrados, triángulos, rectángulos. Para áreas grandes las unidades pueden tener unos 20 cm de lado, mientras que para las más pequeñas pueden construirse de 5 o 10 cm de lado.
- Las hojas de periódico son excelentes unidades para áreas grandes.

Al comienzo, el objetivo de las actividades de medición de áreas será desarrollar la idea de que el área es una *medida del recubrimiento.* No se recomienda introducir el uso de fórmulas en esta primera etapa. Simplemente interesa que los niños recubran las formas y cuenten la cantidad de unidades usadas. Hacer que los alumnos hagan estimaciones del resultado antes de medir, relacionando la precisión con el tamaño de las unidades de igual modo que en el caso de la longitud. Es probable que los distintos grupos lleguen a medidas diferentes para la misma región; discutir estas diferencias con los niños y señalar las dificultades implicadas al hacer estimaciones en las proximidades de los bordes de las figuras.

Actividad 7: Menor o mayor

Presentar una serie de figuras de formas bastante diferentes pero con pequeñas diferencias en las áreas. Los alumnos deben predecir la ordenación de las figuras de la más pequeña a las más grande y anotar sus predicciones. La tarea a continuación será determinar el orden correcto usando cualquier método y unidades que deseen. La determinación del orden "correcto" se les deja a los alumnos.

La actividad puede dar lugar a interesantes discusiones en clase sobre los distintos métodos.

Actividad 8: Rectángulo de igual tamaño

Proponer a los alumnos construir un rectángulo que tenga el mismo tamaño que otra figura que previamente haya elegido (de forma irregular, un triángulo o incluso otro rectángulo). La

actividad se puede realizar con figuras pequeñas que se pueden trazar sobre un papel o muy grandes trazadas sobre el suelo con cintas o tiza. Se recomienda el trabajo en grupos. Dar a todos los grupos la misma figura. Los grupos deben explicar por qué el rectángulo que proponen tiene la misma área que la figura dada; se les debe permitir usar cualquier material que deseen.
La actividad se puede hacer antes de que se les haya introducido las fórmulas para el cálculo de áreas.

Uso de cuadrículas y geoplanos para medir áreas

Las cuadrículas o rejillas de puntos se pueden considerar como “reglas de medir áreas”. Una rejilla de cuadrados permite hacer con las áreas lo que una regla ordinaria hace para las longitudes: permite extender adecuadamente las unidades que recubren la superficie que se desea medir (aunque en general de manera aproximada). Cuando los niños comienzan a usar rejillas cuadrangulares para determinar áreas de superficies rectangulares se les pone en situación de descubrir que la cantidad de unidades cuadradas se puede obtener multiplicando el número de cuadrados en una fila por el número de filas.

3.3. Fórmulas para las áreas de polígonos

La búsqueda de las fórmulas que permiten calcular las áreas de las figuras planas elementales puede ser objeto del diseño de situaciones didácticas en las que alumnos tengan oportunidad de resolver problemas matemáticos y establecer relaciones entre distintas contenidos, en este caso, conexiones entre las distintas expresiones que permiten calcular las áreas de los polígonos.

Rectángulos

Usando el geoplano u hojas de papel con retículas cuadrangulares los alumnos, incluso de tercer nivel, pueden descubrir rápidamente que el número de cuadrados que recubren un rectángulo (su área) se puede determinar rápidamente de una manera abreviada: multiplicando las longitudes de la base por la altura, como se sugiere en la siguiente actividad[3].

Actividad 9:

Distribuir a cada niño una colección de cuatro hojas de papel reticulado similar a la figura A y una hoja con el esquema de la tabla de la figura B. En las hojas reticuladas se pide dibujar cuatro rectángulos diferentes que tengan el ancho de una unidad.

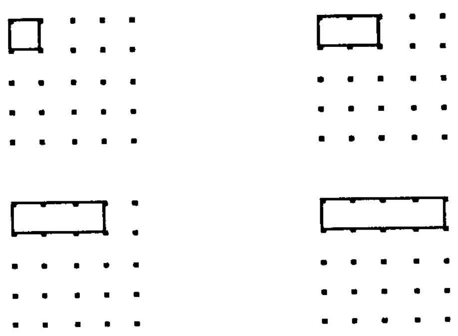


Tabla		
Largo	Ancho	Área
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	1	4
1	2	2
2	2	4
3	2	6
4	2	8
...		

[3] Baroody y Coslick (1998).

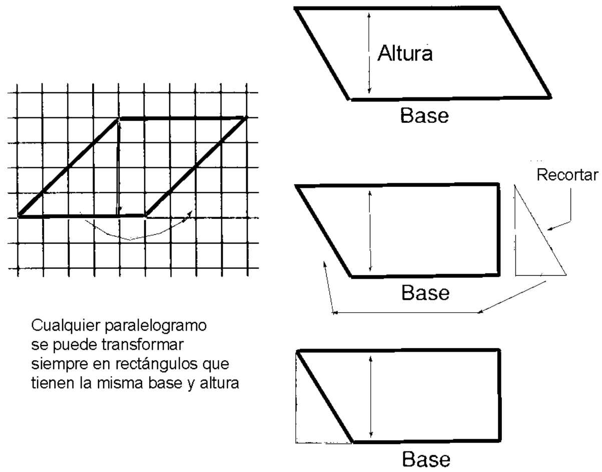
Después de compartir los resultados, preguntar a los niños cuál es el área de un rectángulo de 1x1, 2x1, 3x1, 4x1. Se acuerda en la clase medir el área como el número de cuadrados de 1x1 contenidos en un rectángulo. Resumir los resultados en la tabla. Sobre la segunda hoja de papel reticulado pedir que dibujen cuatro rectángulos diferentes con ancho de 2 unidades. Pedir que encuentren el área de los rectángulos de 1x2, 2x2, 3x2, 4x2. Reflejar los resultados en la tabla. Repetir el proceso para rectángulos de ancho 3, y 4 unidades. En el proceso de reflejar los resultados en la tabla un cierto número de niños reconocerán que el área es el producto del largo por el ancho de los distintos rectángulos dibujados. Proponer nuevos ejemplos de rectángulos y fijar que el cálculo del área de cualquier rectángulo se puede calcular con dicha regla.

Después del trabajo con las cuadrículas o el geoplano será recomendable proponer el cálculo de áreas de rectángulos con dimensiones enteras sin usar la cuadrícula.

- Designar un lado como la base y disponer sobre dicha base unidades cuadradas a lo largo de ese lado. ¿Cuántas filas se pueden poner en rectángulo? Sobre el mismo rectángulo repetir la pregunta usando el otro lado como base.
- Proponer a los alumnos rectángulos indicando sólo las dimensiones. ¿Cómo se puede determinar el número de cuadrados unitarios que llenen este rectángulo? ¿Se puede hacer de dos maneras?
- Proponer finalmente rectángulos con dimensiones no enteras.

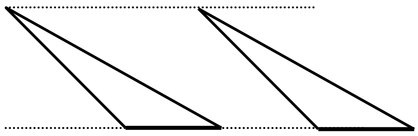
De los rectángulos a los paralelogramos

Una vez que los alumnos comprenden la fórmula de la base por la altura para calcular el área del rectángulo se puede proponer el desafío de determinar el área de los paralelogramos. Interesa lograr que sean los propios alumnos quienes encuentren la fórmula. Proporcionar un rectángulo dibujado sobre una cuadrícula o sobre una hoja en blanco. Su tarea será encontrar una expresión que permita calcular el área de cualquier paralelogramo, no sólo la del rectángulo dado. Pedir que investiguen maneras por las que un paralelogramo se puede transformar en un rectángulo, sin que varíe su área, por lo que la fórmula del área del paralelogramo es la misma que la del rectángulo.



De los paralelogramos a los triángulos

Es importante que los alumnos comprendan la fórmula de los paralelogramos antes de explorar la correspondiente a los triángulos. Con esta base, encontrar la fórmula para el área de los triángulos es relativamente sencillo. Al igual que con los paralelogramos los alumnos deben esforzarse en encontrar una expresión general. Pueden explorar las áreas de triángulos dibujados sobre cuadrículas o geoplanos, de igual modo que con los paralelogramos. Como una ayuda para encontrar la técnica se puede pedir a los alumnos que doblen una cuartilla doblada por la mitad, dibujar un triángulo sobre la hoja después de doblada, y recortar la figura, haciendo de ese modo dos triángulos idénticos. Sugerir que formen una figura cuya área sepan calcular usando los dos triángulos.

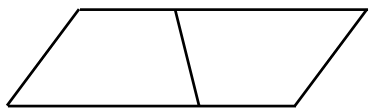


Dos triángulos iguales forman siempre un paralelo- gramo de igual

De los paralelogramos a los trapecios

Hay varios métodos de obtener una fórmula de cálculo de los trapecios relacionadas con las correspondientes a los paralelogramos o rectángulos. Uno de los más sencillos consiste en hacer dos copias iguales de un trapecio y componerlos de manera que se obtiene un paralelogramo. De esta manera resulta la expresión conocida,

$$A = \frac{1}{2}(base1 + base2) \cdot altura$$



Base = base 1 + base 2

3.4. Longitud de la circunferencia

Midiendo con cuidado las circunferencias y el diámetro de distintos objetos circulares (usando para ello una cinta métrica, una cuerda, etc.) y registrando las medidas en una tabla los alumnos pueden descubrir la importante relación entre ambas magnitudes. Estos pueden ser algunos resultados de esas mediciones,

Diámetro	Circunferencia
3 cm	9’5 cm
6 cm	19 cm
10 cm	31 cm
15 cm	47 cm
20 cm	63 cm
...	

Un examen de tales resultados debería llevar a los alumnos a concluir que la longitud de la circunferencia es siempre aproximadamente el triple que el diámetro correspondiente. Se puede requerir a los alumnos para que traten de mejorar de alguna manera las estimaciones haciendo alguna gráfica, o calculando la media aritmética. El valor aproximado variará entre los grupos de alumnos debido a errores en las mediciones, lo que puede ser un contexto rico para discutir los errores de tipo matemático y los que provienen de las acciones físicas; también permite dar sentido a la operación de promediar un conjunto de datos.

3.5. El volumen y su medida directa

La percepción del volumen es paralela a la del área, pero es más difícil de comprender. Experiencias con el volumen se llevarán a cabo tanto con líquidos como con sólidos. Se exponen a continuación algunas de estas actividades.

Uno de los test clásicos para la conservación del volumen de un líquido es llenar de agua dos recipientes de igual volumen (y forma) y cambiar el contenido de uno de ellos a otro de distinta forma. Muchos niños afirman que el volumen ha variado. La inmediata experimentación no convence al niño de que su respuesta es incorrecta, pero la experimentación durante más tiempo ayuda a formar ideas de conservación. Las siguientes actividades ayudan al niño a hacer comparaciones de volumen.

Actividades 10:

1. Para una introducción al volumen, medir líquidos con recipientes no estándares. "¿Cuántas tazas son necesarias para llenar esta botella de plástico? ¿Cómo podemos encontrarlo? Si es conveniente, los niños pueden hacer sus propias mediciones, contando las tazas y anotándolas.

2. Cajas y bloques proporcionan otro elemento para experimentación con el volumen. Las clases de los niveles inferiores usualmente tienen grandes bloques de madera. Puesto que deben almacenarse al final de la jornada o del tiempo de la actividad, pregunte a los niños cuántos cabrán en una caja dada o sobre los estantes donde deban colocarse. Sus respuestas a estas cuestiones aunque no sean ajustadas, sirven como iniciación para el desarrollo de la idea de volumen.

3. Los bloques multibase de Dienes, regletas de Cuisenaire, o similares pueden también ser usados para desarrollar la idea de volumen. "Cuántos cubos llenan este recipiente? ¿Cuántos cubos pequeños serán necesarios para construir un cubo grande? Responder a estas cuestiones y el juego libre asociado a la propia actividad de resolución de problemas del niño sirven para desarrollar la percepción del volumen. Jugar con bloques grandes y pequeños proporciona una oportunidad adicional para formar la idea de capacidad.

Comparación de volúmenes

1. Consiga una botella cilíndrica de plástico transparente con un tapón. En un lateral de la botella pegar una tira de papel para que el niño pueda señalar marcas con un lápiz. Preguntar al niño las siguientes cuestiones, ¿Dónde podemos poner una marca en la botella que indique cuando está medio llena? Marcar el punto donde piensas que esto ocurrirá. Ahora medir el volumen de la botella usando el tapón. ¿Cuántos tapones cabrán en la botella? Llenar la botella con la mitad de esos tapones. ¿Es correcta la estimación cuando la botella está medio llena?

2. Las siguientes actividades están diseñadas como un juego entre dos niños. Obtener un conjunto de 20 cubos, similares a los de Cuisenaire, Dienes, Stern, o bloques corrientes de forma cúbica. En este juego cada niño participa primero y luego actúa como "maestro" del otro. "Toma 3 bloques" ¿Cuántas formas diferentes puedes formar con estos bloques? Dos chicos deberían trabajar juntos para dar sus respuestas. Usa 4 bloques, luego continua con 5 o más. Después, cuando se ha probado con un conjunto de 10 bloques, uno de los dos hace de “maestro". Esa persona hará dos formas diferentes, que no tengan mas de 10 bloques, mientras la otra persona no está mirando. Cuando las dos formas están terminadas, el maestro pregunta al compañero cuál es la más grande. Si el compañero responde correctamente, este ahora hace de maestro y continua el juego. Si responde incorrectamente, el maestro toma otro turno.

Cuando el tiempo ha terminado ambos niños cuentan los bloques necesarios para hacer cada una de las dos formas. Si el compañero falla tres veces seguidas en responder el "maestro" gana la partida. A continuación le corresponde al otro hacer la función de "maestro", componer las formas y hacer las preguntas. El profesor puede intentar confundir al compañero haciendo cada forma con el mismo número de bloques, para que el compañero deba decir "ambos son iguales". Variar el juego puntuando las respuestas y hacer que vaya anotando los resultados. Establecer un límite para el número de tiradas.

Actividades 11: Percepción y comparación de la capacidad

Percepción de la capacidad

Está muy relacionada con la percepción del volumen, las experiencias se llevarán a cabo con sólidos, líquidos y gases. Algunas actividades a realizar serán las siguientes:

1. Comprobar cuántos vasos son necesarios para llenar una bolsa con arena, hacer una estimación previa y repetir la experiencia con limaduras de hierro.
2. ¿Cuántos "puñados" de garbanzos hay en un paquete de un kilo?
3. ¿Cuántas canicas caben en un bote de mermelada? Discutir sobre distintas técnicas de estimación.
4. Dar una lista de objetos que sugieran la idea de capacidad.

Comparación

La forma de los objetos, el grosor, e incluso el material del que están fabricados, dan una idea equivocada sobre la capacidad del objeto. Pueden ayudar en este sentido actividades como las siguientes:

1. Buscar recipientes con distinta forma, distinto ancho de la boca, distinto grosor, etc y comparar la capacidad de cada uno de ellos y colocarlos, según su capacidad, de mayor a menor; hacer una estimación previa.
2. Hacer una lista de recipientes usados en casa en las distintas tareas domésticas (alimentación, limpieza, etc.) y clasificarlos según su capacidad.

Volumen y capacidad son términos usados para expresar la medida del "tamaño" de cuerpos o regiones tridimensionales. Las unidades estándares de volumen se expresan en términos de unidades de longitud, como centímetros cúbicos, metros cúbicos, etc. Las unidades de capacidad se aplican generalmente a líquidos o recipientes usados para contener líquidos o materiales sueltos y son el litro, mililitro, etc.

La comprensión de la magnitud volumen (o capacidad) requiere realizar actividades de comparación entre distintos cuerpos y recipientes. Estas comparaciones tienen que hacerse en la mayor parte de los casos de manera indirecta, introduciendo líquidos o materiales sueltos en los recipientes cuyo volumen o capacidad se comparan.

Los niños deben tener muchas experiencias de comparación directa de capacidades de distintos recipientes. Para ello es necesario disponer de una gran variedad de botes, cajas, etc. que pueden ser comparadas introduciendo semillas.

Actividad 12: Clasificación de capacidades

Dar a los niños una colección de recipientes etiquetados, y elegir uno de ellos como patrón de comparación. La tarea de los niños será clasificar la colección según que tengan más, menos o igual volumen (o capacidad) que el patrón. Preparar una hoja de registro como la siguiente. Comprobar las previsiones llenando los recipientes con algún material suelto (arroz, etc.)

	Previsión			Después de la medida		
Recipiente	Más	Menos	Igual	Más	Menos	Igual
Bote 1						
Bote 2						
...						

Actividad 13: Ordenación de capacidades

Dar una serie de cinco o seis recipientes etiquetados de formas y tamaños diferentes; la tarea consiste en ordenarlos de menor a mayor volumen. Los niños trabajarán en grupos y deberán explicar cómo llegan a la solución que proponen.

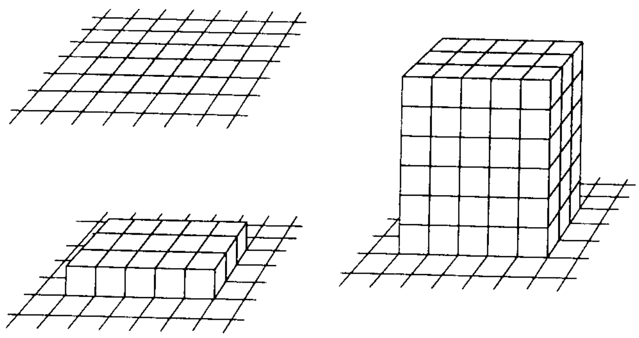
También se puede proponer cuerpos sólidos para comparar según su volumen. Para ello será necesario usar un método de desplazamiento del material suelto o líquido al ser introducidos en un recipiente apropiado y midiendo las variaciones de nivel.

Como unidades no estándar de volumen y capacidad se pueden usar cubos de madera, cucharas, etc.

3.6. Medida indirecta del volumen

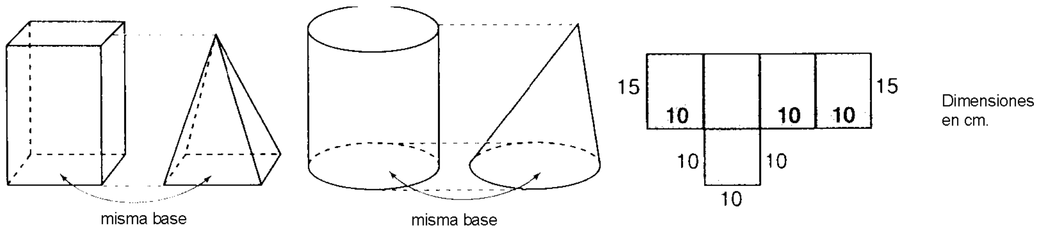
Fórmulas para el cálculo de volúmenes de cilindros

Como sabemos un cilindro es un sólido que tiene dos bases congruentes paralelas y lados paralelos. Como casos particulares de cilindros se incluyen los prismas (cuyas bases son polígonos), prismas rectos, prismas rectangulares y cubos. Es interesante observar que el volumen de todos estos sólidos se obtiene con una fórmula análoga (base por altura) y que es similar a la fórmula para el área de los paralelogramos. Esta expresión pueden deducirla los alumnos usando el material sugerido en la figura adjunta: papel cuadriculado en cm y cubos de plástico o madera de 1cm^3 (unidades de los bloques multibase, por ejemplo). Sobre el papel cuadriculado se puede trazar un rectángulo de 3x5 =15 cm^2. A continuación se pueden poner capas sucesivas de piezas. El volumen del cuerpo que se forma será el área de la base por el número de capas que se hayan puesto, esto es, por la altura.

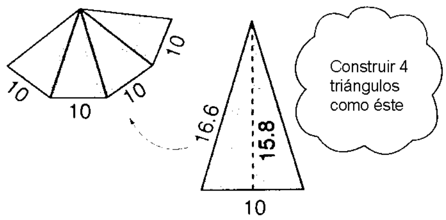


Volúmenes de conos y pirámides

De igual manera que hay una relación sencilla entre las áreas de los paralelogramos y los triángulos, hay una relación similar entre los volúmenes de los cilindros (incluidos los primas) y los conos (incluidas las pirámides). Esta relación es de 3 a 1, o sea, el volumen de un cono es la tercera parte del volumen de un cilindro de igual base y altura. Esta relación pueden encontrarla los alumnos construyendo con cartulina ejemplares de tales cuerpos y llenando el cilindro con semillas de pequeño tamaño (por ejemplo, arroz) usando como medida el cono.



El volumen de una pirámide o un cono es la tercera parte del volumen de un prisma o un cilindro con la misma base y la misma altura.

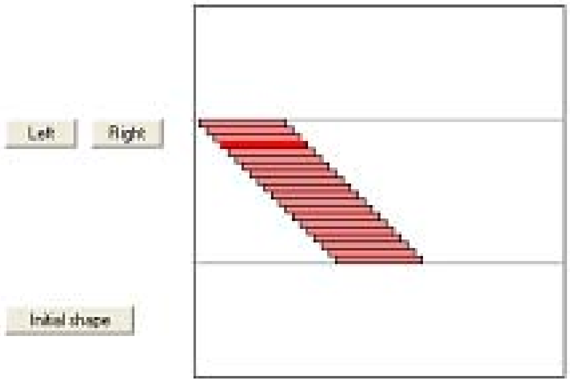


3.7. Recursos en Internet

Conservación del área

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/cava/cava.html

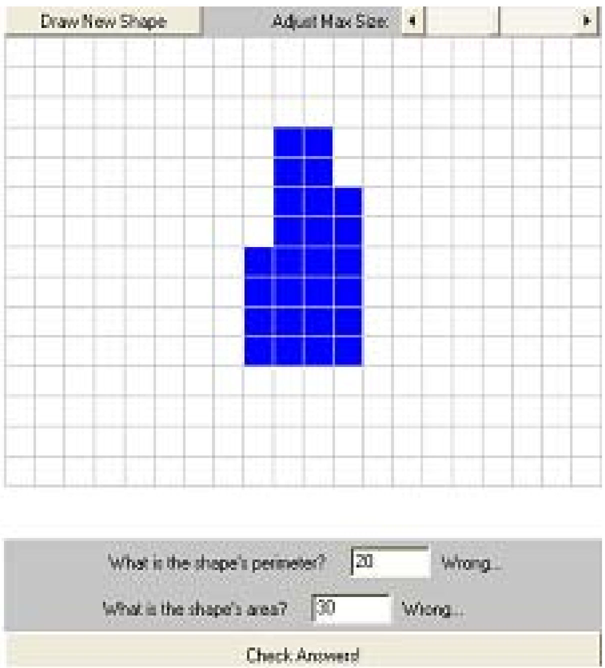
Este programa muestra una colección de rectángulos iguales agrupados de tal manera que forman un rectángulo mayor. La figura se puede transformar desplazando horizontalmente todos los rectángulos pequeños a la izquierda o a la derecha, o sólo algunos de estos rectángulos, permaneciendo constante el área total de la figura completa ya que el área de cada rectángulo estrecho permanece constante (principio de Cavalieri).



Perímetros y áreas (Programa **“**Shape explorer”)

http://www.shodor.org/interactivate/activities/perimeter/index.html

El programa muestra una cuadrícula sobre la que se pueden representar figuras planas de diferentes tamaños y formas que se muestran recubiertas de “baldosas” cuadradas. Se pide decir el perímetro y el área de las figuras contando las unidades correspondientes. Una vez dada la respuesta en la casilla correspondiente el programa informa si es o no correcta la solución.

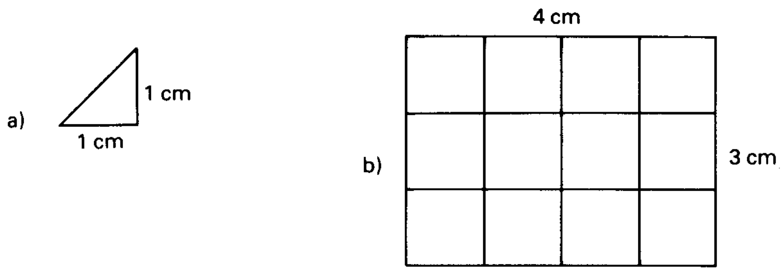


4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

A continuación incluimos algunos ítemes[4], tomados de distintas investigaciones, que permiten evaluar si el alumno reconoce la conservación de las cantidades de magnitudes geométricas ante ciertas transformaciones.

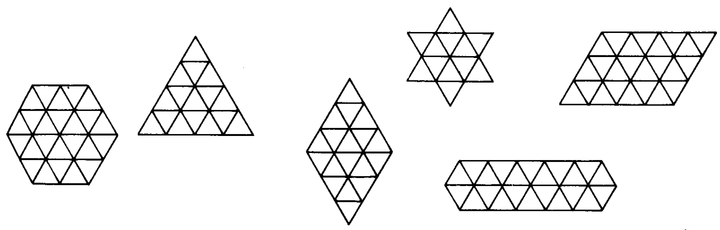
Comparación de áreas como pavimentación de una superficie

1. ¿Cuántos triángulos como el dibujado en a) entrarían en el rectángulo b):



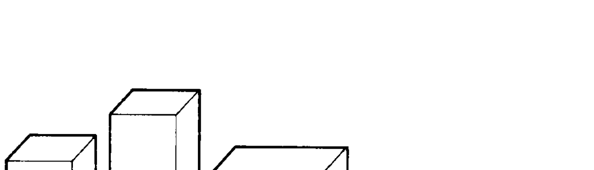
El 70% de los niños de 11 tuvieron éxito en esta pregunta. En cambio el porcentaje de éxito bajó al 57% en la siguiente:

2. Rodea con un círculo cada par de figuras que tengan la misma área:



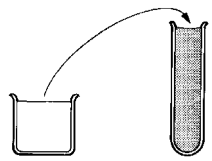
3. Comparación de volumen

Comparar los volúmenes de los siguientes bloques. El 85% de los niños de 12 años es capaz de identificar los bloques de igual volumen.



[4] Dickson, Brown y Gibson (1984),

4. Conservación de volumen



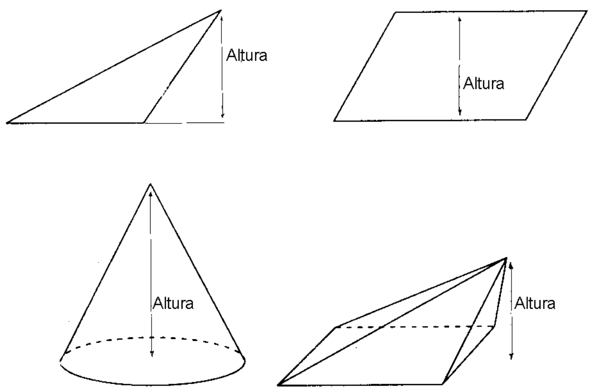
Los niños pequeños relacionan el volumen con la altura e incluso cuando vean trasvasar un líquido entre dos recipientes, piensan que habrá mayor volumen en el más alto.

En cuanto a la medida directa de longitudes usando la regla graduada es frecuente encontrar que los niños no entienden el uso de las marcas para contar el número de centímetros o milímetros que corresponde a una medida. Algunos cuentan las marcas incluyendo la que corresponde al 0, o colocan el comienzo de la regla en el 1, con lo que obtienen una unidad de menos o de más a la que corresponde.

Es posible encontrar alumnos que confunden las unidades en que se expresan los resultados de las medidas o de los cálculos, por ejemplo, dar el área en metros, en lugar de m^2. Así mismo, la proporcionalidad inversa que existe entre el tamaño de la unidad de medida y el resultado de las medidas realizadas con ella, suele ser una dificultad para los escolares; tienen dificultades para entender que si se cambia la unidad por otra mayor la medida de un mismo objeto respecto a esta nueva unidad será menor.

En distintas evaluaciones se han identificado diversas dificultades que tienen los niños con el uso de las fórmulas para medir magnitudes geométricas. En particular se ha encontrado que con frecuencia los alumnos confunden el área con el perímetro. Una explicación de esta dificultad puede ser el haber recibido un énfasis prematuro en el uso de las fórmulas, con poco esfuerzo por desarrollarlas y comprender cómo y por qué funcionan las fórmulas. No es un hecho aislado que si pedimos a los alumnos de 4º nivel que calculen el área de una alfombra de 90 cm de ancho por 150 cm de largo lo que hagan sea sumar ambos números.

Otro error común consiste en no entender el significado de la altura de las figuras geométricas, tanto de dos como de tres dimensiones, hecho que les impide calcular correctamente el área o el volumen de dichas figuras. En las figuras con un lado inclinado los alumnos tienen dificultades para identificar la altura.



Cualquier lado de una figura plana puede ser considerado como *base* de dicha figura, y para cada base habrá una altura diferente. Esto debe estar claro para los niños antes de comenzar a usar fórmulas en las que se hable de base y altura.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

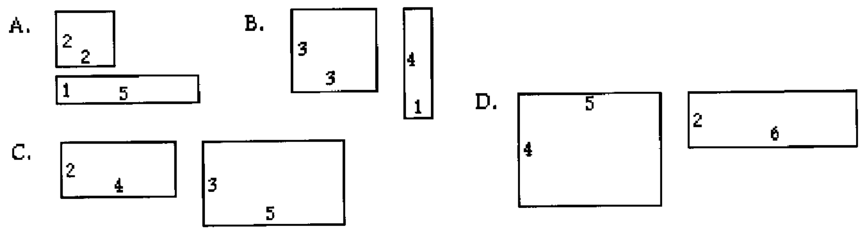
Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizastes personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

- Estudia el desarrollo del tema de "magnitudes geométricas y su medida" en dichos niveles.
- Indica en qué curso se inicia y cuando termina.
- Busca algún tipo de problema o tarea que consideres no está representado en la muestra de problemas que hemos seleccionado como actividad introductoria del estudio de este tema.
- Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
- Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

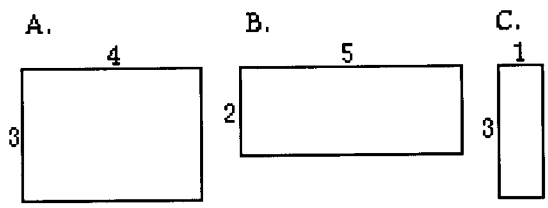
5.2. Respuestas de estudiantes a pruebas de evaluación

1. Una maestra pasó en su clase las siguientes cuestiones para evaluar los conocimientos sobre el área:

Cuestión 1: Para cada par de rectángulos, señala el que tenga mayor área:



Cuestión 2: ¿Cuál es el área de los siguientes rectángulos?



Roberto respondió correctamente a las cuatro comparaciones de la cuestión 1, pero respondió incorrectamente las tres partes de la cuestión 2, dando el valor 7 para los casos A y B y 4 para el C.

a) ¿Cuál ha sido el error sistemático de Roberto en la cuestión 2?

b) ¿Por qué piensas que respondió bien a los cuatro items de la cuestión 1?

2. Áreas de polígonos [5]

Estudio de los documentos 1 y 2:

El documento 1 (adjunto) presenta un ejercicio propuesto por un maestro en una

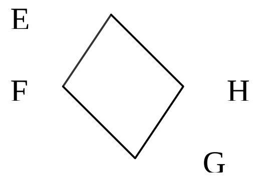
[5] Brousseau et. Al (1995).

evaluación. El documento 2 contiene las respuestas de cuatro alumnos a dicho ejercicio.

Cuestiones sobre los documentos 1 y 2:

1.Haz el ejercicio del documento 1. Demuestra la validez de la fórmula elegida.
2. Identifica tres aspectos que el maestro debería tener en cuenta en la evaluación de las respuestas de los alumnos (por ejemplo, la elección de la fórmula elegida, ...)
3. Aplica los criterios de corrección a las cuatro respuestas de los alumnos presentadas en el documento 2.

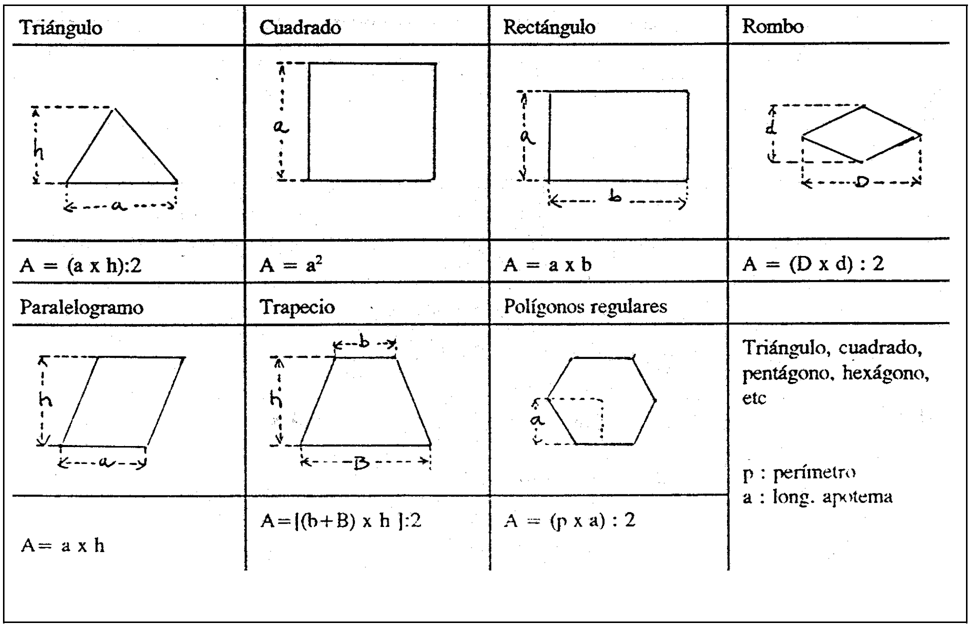
Documento 1:
La figura EFGH representa un rombo. A) Señala en el formulario adjunto la fórmula que permite calcular el área de EFGH; b) Calcula el área del rombo.
Medidas:
EF = 5 cm
FG = 5 cm
GH = 5 cm
HE = 5 cm
EG = 8 cm
FH = 6 cm



Cálculos:

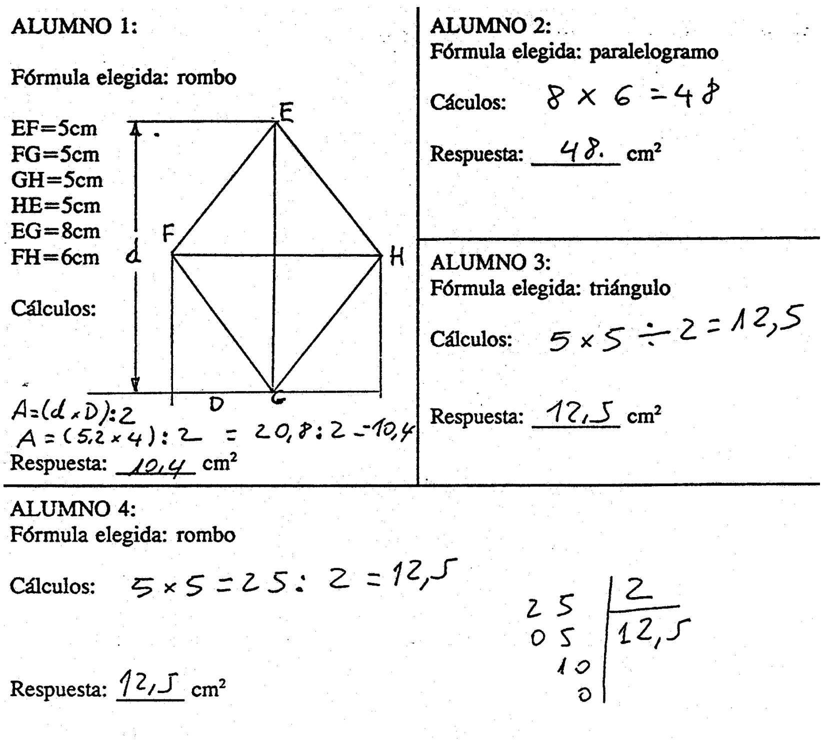
Respuesta: _____ cm^2

Formulario: Área de las principales superficies geométricas



Triángulo	Cuadrado	Rectángulo	Rombo
A = (a x h):2	A = a^2	A = a x b	A = (D x d) : 2
Paralelogramo	**Trapecio**	**Polígonos regulares**	Triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc p : perímetro a : long. apotema
A= a x h	A=[(b+B) x h]:2	A = (p x a) : 2	

Documento 2: Respuestas de cuatro alumnos


ALUMNO 1:

Fórmula elegida: rombo

EF=5cm
FG=5cm
GH=5cm
HE=5cm
EG=8cm
FH=6cm

Cálculos:

A=(d×D):2
A = (5,2×4) : 2 = 20,8 : 2 = 10,4
Respuesta: 10,4 cm²

ALUMNO 2:
Fórmula elegida: paralelogramo

Cáculos: 8 × 6 = 48

Respuesta: 48. cm²

ALUMNO 3:
Fórmula elegida: triángulo

Cálculos: 5 × 5 ÷ 2 = 12,5

Respuesta: 12,5 cm²

ALUMNO 4:
Fórmula elegida: rombo

Cálculos: 5 × 5 = 25 : 2 = 12,5

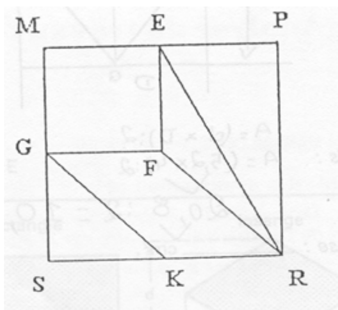
Respuesta: 12,5 cm²

5.3. Análisis de experiencias didácticas: Áreas y perímetros

Se propone trabajar con las 5 piezas de la figura adjunta.

Información:

- MPRS es un cuadrado de lado *a*
- E es el punto medio de MP
- K es el punto medio de SR
- MEFG es un cuadrado



Estudio geométrico de esta figura:

1. Mostrar que
   - F está sobre MR y precisar cuál es su posición.
   - G está sobre MS y precisar cuál es su posición.
2. ¿Cuál es la naturaleza exacta de las tres piezas EPR, GSK, GFRK? Justificar la respuesta.
3. Expresar el área de las 5 piezas en función de *a*. Justificar la respuesta.

B. Estudio didáctico

Se utiliza la configuración anterior para diseñar una secuencia de enseñanza.

B1) Preparación del material:

- Reproducir la figura sobre cartulina, tomando el valor de a = 8cm, y recortar las cinco piezas correspondientes.

B2) Se desea utilizar este material para explorar el concepto de área

1. ¿En qué ciclo y en qué nivel se comienza la enseñanza del concepto de área de figuras poligonales? ¿Cuáles son las dos grandes fases que se consideran indispensables desarrollar en la escuela primaria en relación a este concepto?

2. ¿Cómo podría encontrar un alumno de primaria las relaciones existentes entre las áreas de las cinco piezas? Representar mediante dibujos el proceso que podría seguir un alumno para encontrar estas relaciones.

3. Proponer un conjunto de 8 superficies (distintas de la 5 superficies elementales que constituyen el cuadrado MPRS), construidas utilizando como plantillas las piezas dadas, que permitan ilustrar a la vez la clasificación y la ordenación según el área. (Para cada superficie dejar marcado el contorno de las plantillas usadas).

4. Construir una superficie no rectangular cuya área sea la mitad, y otra cuya área sea el doble, de la del cuadrado MPRS.

5. Encontrar una superficie S0 construida con piezas del puzle que permita:
a)Construir otra superficie S1 de área más grande y perímetro menor.
b) Construir otra superficie S2 de área menor y perímetro mayor.
c) Construir otra superficie S3 de igual área y perímetro diferente.
¿Cuál es el objetivo de esta última actividad?

Bibliografía

Baroody, A. J. y Coslick,R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. London: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G., Duval, A. y Vinrich, G. (1995). *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE*. Talence: IREM d' Aquitaine.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Labor.

Inskeep, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. (Ed.), *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higueras]

Long, C. T. y DeTemple, D. W. (1996). *Mathematical reasoning for elementary teachers*. New York: Harper Collins.

Moreno, F., Gil, F. y Frias, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (p. 503-532). Madrid: Síntesis

Olmo, M. A., Moreno, F. y Gil, F. (1989). *Superfie y volumen*. Madrid: Síntesis.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

VI.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PARA MAESTROS

Carmen Batanero
Juan D. Godino

Índice

Capítulo 1: ESTADÍSTICA

Capítulo 2: Probabilidad

VI.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PARA MAESTROS

Capítulo 1:

ESTADÍSTICA

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. La estadística en la sociedad y en la enseñanza obligatoria

La Estadística ha cobrado gran desarrollo en los últimos años, contribuyendo al avance de la ciencia y la técnica y al crecimiento de la economía, por lo que la mayor parte de los países han introducido su enseñanza desde la educación primaria. La estadística es hoy una parte de la educación general deseable para los ciudadanos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios de comunicación. Las principales razones que fundamentan la enseñanza de la estadística son las siguientes:

- Es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos, frente a criterios subjetivos.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

Otro aspecto es el carácter exclusivamente determinista del currículo de matemáticas, y la necesidad de mostrar al alumno una imagen más equilibrada de la realidad, en la que hay una fuerte presencia de fenómenos aleatorios.

Además, puesto que la estadística elemental no requiere técnicas matemáticas complicadas y por sus muchas aplicaciones, proporciona una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes las aplicaciones de la matemática para resolver problemas reales. La estadística es también un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, resolución de problemas, uso de ordenadores, trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos.

Cuando tenemos en cuenta el tipo de estadística que queremos enseñar y la forma de llevar a cabo esta enseñanza debemos reflexionar sobre los fines principales de esta enseñanza que son los siguientes:

- Que los alumnos lleguen a comprender y a apreciar el papel de la estadística en la sociedad, incluyendo sus diferentes campos de aplicación y el modo en que la estadística ha contribuido a su desarrollo.
- Que los alumnos lleguen a comprender y a valorar el método estadístico, esto es, la clase de preguntas que un uso inteligente de la estadística puede responder, las formas básicas de razonamiento estadístico, su potencia y limitaciones.

1.2. Diseño Curricular Base del MEC

La recogida, organización y presentación de datos, así como la interpretación y las posibles predicciones basadas en los mismos, son conocimientos que tienen cada vez más importancia en nuestro medio social lo que hace deseable su aprendizaje y utilización. Las sencillas actividades estadísticas pueden representar para los alumnos de estas edades aplicaciones de las matemáticas al medio real, prestando significado al mismo, haciéndolo más inteligible.

El objetivo general 6 para el área de Matemáticas de secundaria obligatoria formulado por el M.E.C. recoge el siguiente objetivo, relacionado con la estadística: "*Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y* *formarse un juicio sobre la misma".* Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos:

Conceptos:

1. La representación gráfica
2. Las tablas de datos.
3. Tipos de gráficos estadísticos: diagramas de barras, diagramas lineales, etc.
4. Carácter aleatorio de algunas experiencias.

Procedimientos:

1) Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de los elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares.
2) Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.
3) Elaboración de gráficos estadísticos con datos poco numerosos relativos a situaciones familiares.
4) Expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno.

Actitudes:

1) Actitud crítica ante las informaciones y mensajes transmitidos de forma gráfica y tendencia a explorar todos los elementos significativos.
2) Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos.
3) Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos observados o elaborados.

Respecto a criterios de evaluación sobre los contenidos estocásticos el M.E.C. especifica:

1) Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato.
2) Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado.

1.3. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)[1]

Estas orientaciones curriculares proponen, para los niveles K-2 (infantil y primer ciclo de primaria) que el currículo incluya experiencias con análisis de datos para que los alumnos sean capaces de:

- Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.
- Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.

Se indica que las actividades informales de clasificación y recuento pueden proporcionar un inicio de la comprensión y análisis de los datos por parte de los niños. Se animara a los niños a plantearse preguntas, organizar las respuestas y crear representaciones para sus datos, así como a razonar y comprobar sus ideas comparándolas con los datos.

En los niveles de 3º a 5º los niños deben ser capaces de:

- Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.

[1]National Council of Teachers of Mathematicas (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Va, NCTM.

- Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.
- Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.
- Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.
- Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.
- Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de dato se muestra mejor con cada una de ellas.
- Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos. Deben considerar que los datos son muestras recogidas de poblaciones mayores y llevar a cabo investigaciones y proyectos, considerando el ciclo: formular preguntas, recoger datos y representarlos.

Analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o sobre el tiempo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Los niños deberían también usar programas de ordenadores que les ayuden a representar gráficos, por ejemplo, la hoja electrónica.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Apenas hay estudios evolutivos del desarrollo de los conceptos estadísticos, siendo casi los únicos conceptos que no fueron tratados en los estudios de Piaget con sus colaboradores. Ello se debe a que la estadística sólo muy recientemente es objeto de enseñanza en las escuelas.

El único estudio de este tipo es realizado por Watson en Australia con unos 2200 niños desde el tercer curso de primaria para analizar cómo los niños progresan en la comprensión de las ideas de media, mediana y moda. Diferencia las siguientes etapas:

- Uso coloquial de las palabras media mediana y moda: sin asignarles un significado preciso; por ejemplo la palabra “media” pueden entenderla como “normal”, “frecuente”.
- Estructuras múltiples para los conceptos: son capaces de utilizar ideas como “centro” o “sumar y dividir” para describir la media, pero sólo resuelven problemas muy simples.
- Representación de los conceptos: conocen los algoritmos y los asocian con las ideas de media, mediana y moda. Son capaces de reconocer que la media, mediana y moda representan el conjunto de datos, pero no son capaces de usarlas para comparar dos conjuntos de datos o de estimarlas a partir de una representación gráfica. En los gráficos, los sujetos se concentran en los datos aislados, pero no en las tendencias.
- Aplicación progresiva de la media, mediana y moda a la resolución de problemas, incluyendo problemas de medias ponderadas o comparación de dos grupos. Identificación progresiva de las medidas de tendencia central a partir de la representación gráfica de un conjunto de datos.

Los niños comienzan por la primera etapa y van progresando con la edad y con la instrucción, pero no hay un desarrollo completo si no va acompañado de una enseñanza.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento estadístico. Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

1. Involucrar a los niños en el desarrollo de proyectos sencillos en los que deban recoger sus propios datos a partir de la observación (¿de qué color son los ojos de los niños de la clase?), encuesta (¿qué tipos de trabajo hacen las madres y los padres de los niños?) y medida (¿tienen los pies, manos, hombros más grandes los niños que las niñas?).
2. Concienciar a los niños de que cada dato aislado forma parte de un todo (distribución de los datos) y que hay preguntas que no pueden contestarse con un sólo dato, sino con una distribución de datos.
3. Concienciar a los niños de las tendencias y variabilidad en los datos y cómo estas pueden usarse para responder preguntas sobre los datos o comparar varios conjuntos de datos.
4. Visualizar progresivamente que los datos recogidos son una muestra de una población más amplia y sobre cuáles son las condiciones para que los datos de la muestra puedan representar los datos de toda la población.
5. Animar a los niños a representar sus datos en tablas y gráficos, cuidando las cualidades estéticas y matemáticas de los gráficos de modo que los datos queden correctamente representados en ellos. Advertirles de la facilidad con que un gráfico puede ser engañoso.

En las siguientes secciones describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la estadística en primaria.

3.1. Investigaciones y proyectos

La estadística es hoy día una materia interdisciplinar que se utiliza no sólo en la clase de matemáticas, sino en otras disciplinas donde se convierte en herramienta de resolución de problemas. Los proyectos están concebidos para introducir en la clase una filosofía exploratoria y participativa, en tendencias con las recomendaciones recientes sobre metodología de enseñanza de la estadística.

Lo deseable sería que los propios alumnos eligieran el tema en el que quieren trabajar y elaborasen sus propios proyectos en grupos de dos o tres alumnos. Para ser realistas, hemos de reconocer que son pocos los alumnos que se interesan por la estadística y que ésta es una materia aburrida para ellos. Por el contrario, los alumnos pueden interesarse en muchos temas diferentes y llegar a valorar la estadística como instrumento de investigación de los problemas que les gustaría resolver. En algunos países como Estados Unidos o Inglaterra es ya tradicional el celebrar en las escuelas competiciones de proyectos estadísticos y es posible que esta tendencia no tarde en llegar a nuestros centros. A continuación sugerimos algunos proyectos que podrían realizarse en los cursos 5º y 6º de educación primaria.

Actividad 1: Intención de voto en las próximas elecciones al consejo escolar

Se propone diseñar, llevar a cabo y analizar los datos de una encuesta en el centro para estudiar la intención de voto en el próximo consejo escolar, una vez que se conocen los candidatos a representantes de los alumnos. Los alumnos deben diseñar el cuestionario, seleccionar una muestra representativa de alumnos del centro, distribuir el cuestionario y analizar los datos. Algunas cuestiones relacionadas son:

- ¿Qué preguntas debemos incluir en el cuestionario? ¿Están claras las preguntas? ¿Qué variables identificativas del alumno podrían influir en su intención de voto?
- ¿Cómo elegimos la muestra de alumnos? ¿Cuál es la población objetivo? ¿Cuál es la población que podemos alcanzar?
- ¿Sería la encuesta fiable si hay un porcentaje alto de no respuesta? ¿Cómo podemos motivar la participación y disminuir la no respuesta? ¿Cómo y cuándo distribuimos el cuestionario y recogemos los datos?
- ¿Qué nos dicen los resultados? ¿Son diferentes en los distintos cursos? ¿En chicos y chicas?

Actividad 2: ¿Se mejora con la práctica?

1. Estimación de tiempos:
Intenta estimar la duración de un minuto. Para ello tu compañero coge un reloj que cuente segundos y te indica cuando debes comenzar a calcular el tiempo. Tú te concentras y cuando creas que ha pasado un minuto dices ¡ya!. Tu compañero mira el reloj y anota los segundos transcurridos. Comprobáis si el tiempo transcurrido es verdaderamente un minuto o en cuántos segundos te has equivocado. ¿Crees que si repites el experimento 10 veces, cada vez estimarás el minuto con más exactitud? ¿Mejoras con la práctica?

2. Estimación de distancias:
Trabaja con un compañero. Uno dibuja un segmento con una regla graduada y mide su longitud;, el otro estima la longitud del segmento. Anotad la diferencia entre el valor estimado y el valor real del segmento. ¿Crees que si repites el experimento varias veces, cada vez estimarás mejor la longitud del segmento? ¿Mejoras con la práctica?

3. Durante la clase de gimnasia se recogen datos de cada alumno el primer día de clase y una vez transcurrido 3 meses. Podrían analizarse, entre otras las siguientes variables, para ver si la práctica ayuda a mejorar, qué alumno mejoró más globalmente y si mejoran más las chicas o los chicos:

- tiempo en segundos para recorrer 50 metros
- pulsaciones por minuto antes y después de correr los 50 metros
- altura máxima que se puede saltar
- longitud máxima que se puede saltar
- Número de abdominales seguidos hasta cansarse
- Número de canastas encestadas en 10 intentos

Actividad 3: ¿Cuántas lentejas tiene un kilo de lentejas?

Se trata de estimar el número aproximado de lentejas en un kilo, sin tener que contarlas todas. Puesto que el proceso de llenado de un paquete de lentejas tiene un componente aleatorio, este número variará de uno a otro paquete. Se plantea así un problema de estimación que es común a otros muchos contextos, por ejemplo, cuando se estima el número medio de glóbulos rojos en sangre de individuos adultos.

Los alumnos por equipos podrían tratar de estimar el número de lentejas en paquetes seleccionados de varias marcas comerciales. Se presentaría el problema de que hay que especificar con claridad la variedad, pues existen diversos tamaños. Una vez fijada una variedad y comprados paquetes de diversas marcas cada equipo trataría de estimar el número de lentejas de su paquete.

Para ello se pueden tomar datos del número de lentejas en varias muestras de unidades de capacidad pequeñas, como el centímetro cúbico y resolver primero el problema de la estimación del número de lentejas en un cm^3. Los alumnos recogerán datos de las muestras de cm^3 representándolos gráficamente, y estudiando su distribución, media y desviación típica.

Calculado el volumen de los paquetes de kilo de lentejas, para calcular la distribución del número de lentejas en un paquete de kilo, se trata de hacer un cambio de variable en una distribución. Por tanto, la media y desviación típicas quedarán afectadas por el cambio de escala que pasa del cm^3 al volumen del paquete.

3.2. Datos y fuentes de datos

Los proyectos en la clase de estadística se conciben como verdaderas investigaciones asequibles al nivel del alumno, donde tratamos de integrar la estadística dentro del proceso más general de investigación. Es decir, planteamos unos objetivos y preguntas que el alumno debe tratar de contestar. Para ello el alumno necesita recoger datos, que pueden provenir de diversas fuentes, ser obtenidos mediante diferentes técnicas, y corresponder a diversas escalas de medida y tipos de variables estadísticas, como se resume en la tabla siguiente:

Tipos de datos en los proyectos

Procedencia de los datos	**Variables estadísticas incluidas**
Anuarios estadísticos	Cualitativa
Encuestas	Cuantitativa pocos valores
Experimento realizado en la clase	Cuantitativa necesidad de agrupar
Internet	**Técnica de recogida de datos**
Prensa	Observación
Simulación	Encuesta
	Medida

Consideramos importante que el alumno tenga oportunidad de apreciar esta diversidad de datos estadísticos. Algunas veces los datos se encuentran disponibles, pero hay que saber localizarlos de diferentes fuentes, como libros o anuarios estadísticos. Por ejemplo, el gráfico adjunto, tomado del boletín de Cruz Roja Española, Diciembre, 2001 puede servir para plantear una actividad de comparación de dos conjuntos de datos, que podría apoyarse en otras representaciones gráficas alternativas.

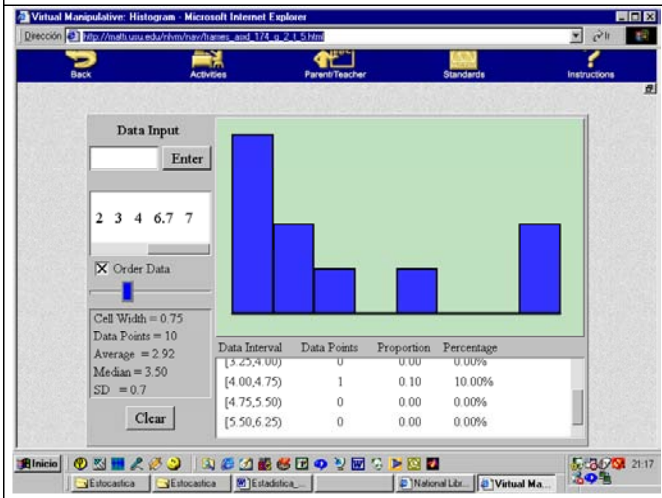
La red Internet proporciona en la actualidad datos para cualquier tema por el que los alumnos estén interesados, bien a partir de servidores estadísticos específicos como Data Sets and Stories Library donde los profesores de estadística han puesto sus datos al servicio de la enseñanza, bien recurriendo a organismos oficiales como el INE, Eurostat, Unesco u otros.

En otras ocasiones los datos son recogidos por los alumnos mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa. La selección de una muestra representativa plantea problemas de tipo teórico y práctico, relacionados con la población objetivo y alcanzada, el marco de muestro, los métodos de selección, la administración del cuestionario y los problemas de no respuesta.

La información que queremos recoger puede corresponder a diversos niveles que se corresponden con diferentes técnicas de obtención de datos: información consciente y conocida (encuesta), información desconocida, pero que puede deducirse de la observación e información no consciente ni observable (medida).

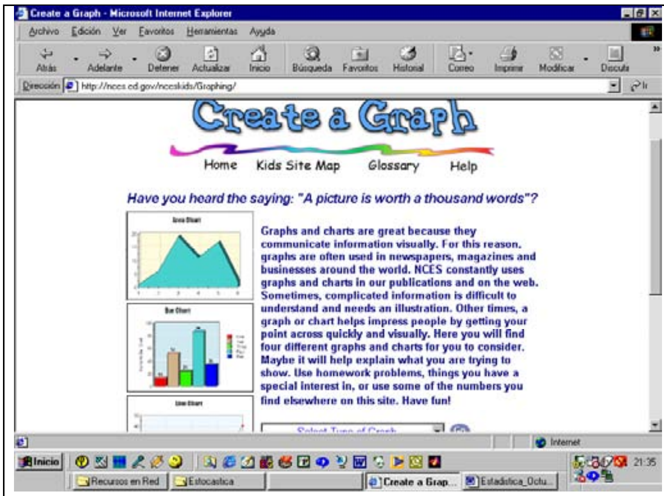
3.3. Recursos en Internet

1. Histogramas:
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_174_g_2_t_5.html



Esta página permite explorar el efecto de variar la anchura de los intervalos sobre la forma del histograma, así como de añadir o quitar datos.
Proporciona también tablas de frecuencia para el histograma elegido, así como la media y mediana.
Es posible también visualizar el efecto de los valores atípicos, tanto sobre el histograma como sobre la media y mediana.

Creacion de gráficos interactivamente
http://nces.ed.gov/nceskids/Graphing/



Usando esta página los alumnos pueden crear y modificar a su gusto una variedad de gráficos estadísticos, proporcionando los datos de entrada, que podrían ser datos tomados en clase por los alumnos.

Los gráficos son interactivos y una vez creados es posible cambiar el formato o colores, suprimir o añadir nuevos datos.

Los gráficos pueden ser impresos para ser utilizados en los proyectos por los estudiantes.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

4.1. Comprensión de tablas y gráficos estadísticos

Los profesores suponen, a veces, que la elaboración de tablas y gráficos es muy sencilla y dedican poco tiempo a su enseñanza. Sin embargo, elaborar una tabla de frecuencias o un gráfico supone ya una primera reducción estadística, pues se pierden los valores originales de cada uno de los datos individuales pasándose a la distribución de frecuencias. Este concepto es ya complejo, al referirse al conjunto de los datos y no a cada caso particular. Mientras que los niños comprenden bien propiedades que se refieren a individuos, como el color de pelo de una persona o su altura, les resulta más problemático comprender la idea de distribución del color de pelo de un grupo.

La destreza en la lectura crítica de datos es una necesidad en nuestra sociedad tecnológica, ya que encontramos tablas y gráficos en la prensa, comercio, así como en distintas asignaturas del currículo. Podemos distinguir cuatro niveles distintos de comprensión de los gráficos, que pueden aplicarse a las tablas y gráficos estadísticos. El objetivo de la educación estadística sería llevar a cada alumno a adquirir el mayor nivel para el cual esté capacitado:

- *Lectura literal* (leer los datos): este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo. Por ejemplo, en la Figura 1, responder a la pregunta, ¿cuántos chicos practican mucho deporte?
- *Interpretar los datos* (Leer dentro de los datos): incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas. Por ejemplo, en la Figura 1, responder a la pregunta de si practican más deporte los chicos o las chicas.
- *Hacer una inferencia (*Leer más allá de los datos): requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico. En la Figura 1, dar un razonamiento sobre si los datos se podrían aplicar a todos los chicos y chicas del colegio.
- *Valorar los datos* (Leer detrás de los datos). Supone valorar la fiabilidad y completitud de los datos, como hacer un juicio sobre si realmente las preguntas de la encuesta miden la práctica de deporte, o cómo podríamos medirlo de una forma más fiable.

Hay varios puntos que afectan a la comprensión de los gráficos y a su dificultad y que deben ser tenidos en cuenta por los profesores:

- conocimiento previo del tema al que se refiere el gráfico; si el alumno está o no familiarizado con el contexto;
- conocimiento previo del contenido matemático del gráfico, esto es, los conceptos numéricos, relaciones y operaciones contenidas en el mismo;
- conocimiento previo del tipo de gráfico empleado (gráfico de barras, pictograma, etc.).

Cuando los alumnos tratan de hacer los gráficos estadísticos cometen errores. Los más habituales son los siguientes:

- elección incorrecta del tipo de gráfico, como usar polígonos de frecuencias con variables cualitativas;
- la elección de las escalas de representación son poco adecuadas, o bien omitir las escalas en alguno de los ejes horizontal o vertical, o en ambos;
- no especificar el origen de coordenadas;
- no proporcionar suficientes divisiones en las escalas de los ejes;
- no respetar los convenios, como al obtener un diagrama de sectores en los que éstos no son proporcionales a las frecuencias de las categorías.
- mezclar datos que no son comparables en un gráfico, como comparar 30 sillas y 50 kg. de carne.

4.2. Medidas de posición central

Además de ser uno de los principales conceptos estadísticos, la media tiene muchas aplicaciones en cuestiones prácticas de la vida diaria. Que este concepto no es tan simple como parece lo puedes comprobar al tratar de resolver el siguiente problema:

> Problema: Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 60 kilos. y el de los hombres de 90. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?

Una reacción frecuente al resolver el problema anterior es decir que la media es 75 kilos. Sin embargo esta solución es errónea porque en el ascensor hay más hombres que mujeres. Las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada son frecuentes: calcular la puntuación media en un curso, la velocidad media, o el índice de precios. También cuando calculamos la media a partir de una tabla de datos. No se puede olvidar que en este caso cada valor de la variable tiene que ponderarse por su frecuencia.

También se cometen errores al calcular la media, mediana y moda. Algunos de los más frecuentes son:

- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar del valor de la variable.
- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente; calcular la moda en vez de la mediana; equivocarse al calcular el valor central.
- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias; no tener en cuenta la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media.

En otros casos el cálculo se hace correctamente, pero no se entiende el algoritmo de cálculo. Esto se puede comprobar si le pides a un alumno que te diga 10 números diferentes cuya media sea igual a cuatro o bien que te dé el número que falta entre 5 sabiendo que la suma de los cuatro primeros es 23 y la media es igual a 5. Muchos no sabrán como hacerlo o lo harán con dificultad.

4.3. Características de dispersión

El estudio de una distribución de frecuencias no puede reducirse al de sus promedios, ya que distribuciones con medias o medianas iguales pueden tener distintos grados de variabilidad. Un error frecuente es ignorar la dispersión de los datos cuando se efectúan comparaciones entre dos o más muestras o poblaciones.

> Ejemplo**: ¿**Te parece por ejemplo, que demuestran igual constancia y deberían calificarse igual dos alumnos si en el primero tuvo un 10 en el examen teórico y un 0 en el práctico y otro que tuvo un 6 y un 4?

La desviación típica mide la intensidad con que los datos se desvían respecto de la media, pero muchos libros de texto no resaltan bien esta propiedad y ponen mayor énfasis en la heterogeneidad entre las observaciones que en su desviación respecto de la posición central.

> Ejemplo: ¿Cuál de los dos conjuntos tiene mayor dispersión?
> Conjunto A: 10, 20, 30, 40, 50 y 60 cm.
> Conjunto B :10, 10, 10, 60, 60 y 60 cm.

Otras dificultades se refieren al cálculo, ya que algunos alumnos suponen que no hay que tener en cuenta los ceros para calcular la desviación típica o no ponderan los valores cuando hacen un cálculo a partir de la tabla de frecuencias.

4.4. Itemes de evaluación

A continuación incluimos información sobre algunos ítemes usados en investigaciones sobre la comprensión de la estadística. Indicar cuál es la solución correcta y el tipo de razonamiento que subyace en las respuestas incorrectas.

Item 1. El ayuntamiento de un pueblo quiere estimar el número promedio de niños por familia. Dividen el número total de niños de la ciudad por 50 (que es el número total de familias) y obtienen 2.2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) La mitad de las familias de la ciudad tienen más de 2 niños
b) En la ciudad hay más familias con 3 niños que familias con 2 niños
c) Hay un total de 110 niños en la ciudad
d) Hay 2,2 niños por adulto en la ciudad
e) El número más común de niños por familia es 2

Item 2. Supón que quieres comprar un coche nuevo y quieres decidir entre la marca A y B. En una revista de automóviles encuentras un estudio estadístico sobre reparaciones efectuadas el último años que muestra que la marca A tiene menos averías que la B. Sin embargo, te encuentras un amigo que te dice que compró el año pasado un coche B y no ha tenido más que problemas: primero se le estropeó la inyección de gasolina y gastó 25.000 pts, luego tuvo que cambiar el eje trasero y al final, ha vendido el coche porque se le fue la transmisión. ¿Que decisión tomarías, comprar un coche A o B?

Ítem 3. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.
b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?
c. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas estadísticas.
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño de las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de respuestas a tareas de evaluación

Un profesor ha pedido a sus alumnos que midan la cantidad de nieve caída cada día de una semana. Han obtenido los datos siguientes: Lunes, 6 cm, Martes, 4 cm, Miércoles, 4 cm, Jueves 1 cm y Viernes 0 cm. El profesor pide calcular la cantidad media de nieve que ha caído al día.
Para cada una de las siguientes situaciones, describe los posibles motivos de las respuestas del alumno y cómo puede ayudarle un profesor a comprender el concepto o el procedimiento implicado:

a) Isabel no entiende por qué la suma de 15 cm se tiene que dividir por 5 en lugar de 4 para saber el promedio de nieve caída.
b) Carlos no comprende por qué la respuesta puede ser 3 en lugar de una de las medidas.
c) Isabel no comprende por qué la suma de las diferencias entre cada puntuación y la media tiene que ser cero.

2. Supón que formas parte de un jurado de un concurso escolar sobre experiencias en la clase de ciencias. Jaime investigó si las plantas de guisantes crecen más bajo la luz solar o con una cantidad igual de luz procedente de una lámpara. La tabla siguiente contiene las mediciones que realizó.

	Altura de las plantas para cada una de las condiciones de iluminación											
Luz solar	0'4	1'3	1'8	1'9	2'2	2'2	2'3	2'5	2'6	2'6	2'8	3
Luz artificial	1'3	1'5	1'8	2	2'	2'2	2'2	2'3	2'4	2'7	2'8	3

Jaime informó que la altura media de las 12 plantas de guisantes expuestas a la luz solar fue de 2.13 y la correspondiente a las otras 12 plantas expuestas a la luz artificial fue de 2.2. Concluyó que las plantas de guisantes crecen más bajo la luz artificial. Evalua la conclusión de Jaime.

3. Para cada uno de los ítemes siguientes analiza las respuestas de los alumnos, indicando si es o no correcta y explica el tipo de razonamiento seguido

Ítem 1. Se han elegido 10 familias y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1.2 ? Justifica tu respuesta.
Respuestas

a. *"Las otras 8 familias tienen que sumar un total de 7 niños. Porque al hacer esa media necesitamos 12 niños".*
b. *"De las 8 familias, que 7 de ellas tengan 1 hijo y la octava que no tenga hijos, ..."*
c. *" Podrían tener dos niños. Porque la media es de 9'6 niños entre las 8 familias:*

Familia	*1ª*	*2ª*	*3ª*	*4ª*	*5ª*	*6ª*	*7ª*	*8ª*
N. hijos	*2*	*1*	*1*	*1'6*	*1*	*1*	*1*	*1*

d. "Podrían tener un hijo por familia, pero no sabría explicar por qué. Creo que es porque de 10 familias que elijo, cojo 8 y si los divido me da 1'25".

Ítem 2. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaron menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

Respuestas

- *"Es igual porque al final se quedaron todos con la misma harina".*
- *"Es igual porque la cantidad de harina que dan los que tienen mucha es igual a la cantidad de harina que los que la reciben".*
- *"Fue menor ya que al final tendrán que tener todos la misma cantidad".*

Ítem 3. Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

$$\frac{5+3+4+4+4+4}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

- *" Sí es posible, porque sí se puede hacer. Por ejemplo, cogemos cuatro veces el 5 y una vez el 4, lo sumamos y lo dividimos entre 6 y el resultado es 4".*
- "*No es posible porque entre 6 números donde el mayor es 5 no pueden sumar 24".*
- *"No es posible porque en todo caso saldría –4 y no 4".*

4. Las siguientes tareas se han usado para detectar otros errores de comprensión de la media. Analiza qué propiedad se trata de evaluar y cuál es la respuesta correcta:

1) ¿Qué quiere decir que el número medio de niños por familia en España es 1'2? Danos un ejemplo de 10 familias de modo que le número medio de niños en las 10 familias sea igual a 1'2.
2) Unos niños traen tierra a clase para plantar macetas. Cada uno trae lo que puede y los que traen más tierra reparten a los que traen menos de modo que al final cada niño tiene 1'3 kilos de tierra. Si un niño nuevo viene a clase y deciden repartir a partes iguales, ¿Qué cantidad tendrá ahora cada niño?

3) La edad media de un grupo de niños es de 7’8 años. Cuál será la edad media de los niños dentro de seis meses?

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2000). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. [Recuperable en, http://www.ugr.es/local/batanero/].

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58

Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1993). Análisis exploratorio de datos; sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, nº 9, 25-31.

Vallecillos, A. (2001). Análisis exploratorio de datos. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 559-589). Madrid: Síntesis.

VI.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD PARA MAESTROS

Capítulo 2:

PROBABILIDAD

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

1.1. Diseño Curricular Base del MEC

La probabilidad, como tal, no aparece como un tema específico en la educación primaria, aunque encontramos menciones al tema en forma implícita y explícita.

Por ejemplo, el objetivo general 6 para el área de matemáticas formulado por el M.E.C. sugiere el trabajo con fenómenos aleatorios:*"Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma"*.

Este objetivo es desarrollado en el bloque de contenidos referido a organización de la información en los siguientes términos, donde se alude explícitamente a los experimentos aleatorios, dentro de los conceptos, recogiendo como tal "*Carácter aleatorio de algunas experiencias*".

Dentro de los procedimientos en este mismo bloque se incluye también la *"expresión sencilla del grado de probabilidad de un suceso experimentado por el alumno"*.

Respecto a *criterios de evaluación* sobre probabilidad especifica el número 11, en el que se contempla claramente una introducción a la asignación de probabilidades en casos sencillos: "*Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos, y comprobar dicho resultado"*.

1.2. Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

La probabilidad se contempla en estas orientaciones curriculares desde el jardín de infancia. En los niveles K-2 (infantil y primer ciclo de primaria) se especifica que todos los niños deben discutir sobre sucesos familiares a su experiencia les parecen fáciles o difíciles de ocurrir. Las ideas de probabilidad a estos niveles han de ser informales.

En los niveles 3-5 se espera que los niños alcancen competencia para:

- decribir sucesos como probables o improbables y discutir el grado de probabilidad usando palabras como seguro, igual probabilidad e imposible;
- predecir la probabilidad de los diferentes resultados de experimentos simples y comprobar las predicciones a través de la experimentación;
- comprender que podemos representar la probabilidad de un suceso por un número comprendido entre cero y uno.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE

Desde muy pequeño el niño debe aprender a estimar, discriminar y diferenciar formas, distancias y cantidades. Las operaciones aritméticas básicas se pueden también concretizar en operaciones con objetos físicos (juntar o separar colecciones, etc.) que tienen la propiedad de ser reversibles (volver a los operandos primitivos al deshacer la operación).

Por el contrario, no existe una experiencia concreta similar de lo aleatorio, ya que no podemos manipular estos fenómenos para producir un resultado específico, ni devolver los objetos a su estado inicial deshaciendo la operación. Por ejemplo, si hacemos girar la aguja en una ruleta, desde una posición inicial, impulsándola hacia la derecha, es muy poco probable que un impulso a la izquierda devuelva la aguja a su posición inicial. Esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios sin duda influye en el desarrollo más tardío de las nociones de aleatoriedad y probabilidad.

2.1. La Intuición del Azar

El primer paso para comenzar a enseñar probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas.

Piaget e Inhelder (1951) pensaban que los niños pequeños no pueden comprender bien el azar, porque para ello tendrían que entender la relación de causa y efecto. Por ello piensan que no hay una intuición del azar innata en el niño, como no existía tampoco en el hombre primitivo, que atribuía los sucesos aleatorios a causas ocultas o a la "voluntad de los dioses".

Esta opinión es rechazada por Fischbein para quien la *intuición primaria* del azar, esto es, la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista aparece antes de los 7 años. Fischbein se basa en la conducta de los niños al practicar juegos de azar, ya que en juegos sencillos, los niños son capaces de elegir la opción de mayor probabilidad. Esta comprensión es gradual y progresiva.

En los fenómenos aleatorios los resultados aislados son imprevisibles pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Cuando se comprende esto aparece la idea de probabilidad, expresada por la razón entre las posibilidades de un caso particular y del conjunto de posibilidades. Esto ocurre en la etapa de las *operaciones formales*.

Fischbein sostiene que la distinción entre el azar y lo deducible no se realiza espontánea y completamente al nivel de las operaciones formales, porque está influenciado por las tradiciones culturales y educativas de la sociedad moderna, que orientan el pensamiento hacia explicaciones deterministas.

2.2. La estimación de la frecuencia relativa

Supuesto que un niño sea capaz de diferenciar los fenómenos aleatorios y deterministas, el segundo paso es que pueda estimar en una serie de experimentos cuáles son los sucesos que aparecen con mayor o menor frecuencia. Muchos psicólogos han llevado a cabo experimentos de aprendizaje probabilístico, en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa.

> Ejemplo. Se presenta al alumno dos luces de color diferente (pueden ser rojo y verde) que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia, por ejemplo, el 70 y el 30%, respectivamente. El sujeto debe predecir cuál de las dos luces se encenderá la próxima vez.

Los resultados obtenidos en este tipo de experimentos apoyan fuertemente la conclusión de que los niños adapta sus predicciones a las probabilidades de los sucesos que se le presentan como estímulo. Ello nos indica que los niños son capaces de apreciar las diferentes frecuencias relativas con que aparecen los resultados de los fenómenos aleatorios.

Esta predicción mejora con la edad, Como resultado de experiencias acumuladas, la intuición de la frecuencia relativa se desarrolla de un modo natural como consecuencia de las experiencias del niño con situaciones que implican sucesos aleatorios, en las que sea necesaria una estimación de las frecuencias relativas de los fenómenos. Es fácil pensar en tales experiencias en la vida diaria, por ejemplo, cuando estimamos el tiempo que transcurre entre un autobús y otro, o hacemos una previsión sobre si va a llover o no, según el día se presente más o menos nublado, etc. Al llegar a la adolescencia, incluso se pueden elegir estrategias adecuadas en función de las frecuencias de los sucesos aleatorios.

2.3. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad

El niño puede hacer juicios probabilísticos, en situaciones sencillas, por ejemplo al elegir, entre dos urnas o cajas con diferente número de bolas blancas y negras, aquella que ofrezca más posibilidades de obtener una bola blanca. Hay que tener en cuenta que aquí aparece un problema de comparación de fracciones por lo que se seguirán las estrategias y etapas que se describen sobre proporcionalidad.

Los niños comienzan resolviendo problemas que impliquen comparación de probabilidades de un mismo suceso A en dos experimentos diferentes sólo en situaciones donde, bien el número de casos favorables o el número de casos no favorables a A son iguales en ambos experimentos (sus estimaciones se basan en comparaciones binarias). Posteriormente pasan a resolver problemas en que los casos se pueden poner en correspondencia mediante una proporción.

Los adolescentes progresan rápidamente en el cálculo de probabilidades, incluso cuando las fracciones a comparar tienen diferente denominador. Esto se observa con niños a partir de 12-13 años, e incluso a partir de 10 años con la ayuda de la instrucción.

3. SITUACIONES Y RECURSOS

Los resultados de diversas investigaciones proporcionan orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Algunas de estas orientaciones son las siguientes:

1. Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
2. Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
3. Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
4. Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
5. Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras.

En los siguientes apartados describimos algunos tipos de actividades y recursos para el estudio de la probabilidad en primaria.

3.1. Juegos y sorteos

Los niños son muy aficionados a los juegos. En ellos el azar interviene en diferentes formas. Por ejemplo, los niños echan a suerte cuando juegan al escondite o al rescate porque ninguno quiere "quedarse". Podemos aprovechar estas actividades infantiles para hacerles observar los resultados aleatorios y no aleatorios.

Por otro lado los niños juegan al parchís, la oca y otros juegos de azar y en los que a veces también se mezclan las estrategias. Algunos de estos juegos contribuyen a la formación de creencias, como, por ejemplo, que el número cinco es el más difícil, cuando se lanza un dado. Todas estas actividades se podrían aprovechar en relación con la introducción de la probabilidad

Actividad 1.

"Pito pito" es una canción que usan los niños para echar a suertes. Dice así: "Pito pito gorgorito, donde vas tu tan bonito, a la vera de mi abuela, pim, pam fuera! (El que le toque se queda).

a) ¿Conoces otras canciones para echar a suertes? ¿Cuándo las usais?

b) Vamos a colocarnos en un corro y echar a suertes con "pito pito" ¿Sería justo comenzar siempre por el mismo niño? ¿Por qué?

c) ¿Conoces otras formas de echar a suertes?

d) ¿Podríamos poner los nombres de cada niño en un papel y elegir uno al azar? ¿Qué significa elegir al azar? ¿Cómo lo harías? ¿Es más fácil que salga el nombre de un niño o de una niña?

3.2. Experimentación y estimación frecuencial de probabilidades

En este tipo de actividades se proporciona a los alumnos algunos dispositivos generadores de resultados aleatorios, como dados, monedas, fichas, ruletas, etc. La finalidad será que los alumnos experimenten y adquieran una experiencia de lo aleatorio, incluyendo la observación de la imprevisibilidad de resultados, la variabilidad de las pequeñas muestras y la convergencia gradual a la probabilidad teórica. Será necesario que el profesor organice la recogida de datos, la representación gráfica de los resultados y la discusión de los mismos. Se animará a los alumnos a expresar sus creencias previas sobre los fenómenos aleatorios y a contrastarlas con los resultados experimentales. La recogida de datos, organización en tablas y representación gráfica permite conectar este tema con la estadística.

Actividad 2:

a) Imagina que estás jugando al parchís con un amigo. Para poder comenzar a mover la ficha es preciso obtener un cinco, pero tu amigo prefiere que se le exija obtener un 3, porque piensa que de este modo tiene ventaja. ¿Tú que opinas? ¿Puedes dejarle que comience a mover la ficha cuando le salga el 3, o es preciso que los dos juguéis a obtener el mismo número?

Otro compañero sugiere que hagáis un experimento para resolver la discusión. Piensa que de este modo se puede saber quién tiene ventaja.

Fíjate en la tabla que te presentamos a continuación. Trata de adivinar cuantas veces, aproximadamente, saldrá el 3 y cuantas el 5 si lanzas un dado 24 veces. Escribe este número en la columna "número esperado de veces".

Resultado	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Nº esperado de veces
1				
2				
3				

4				
5				
6				
Total		24	1	24

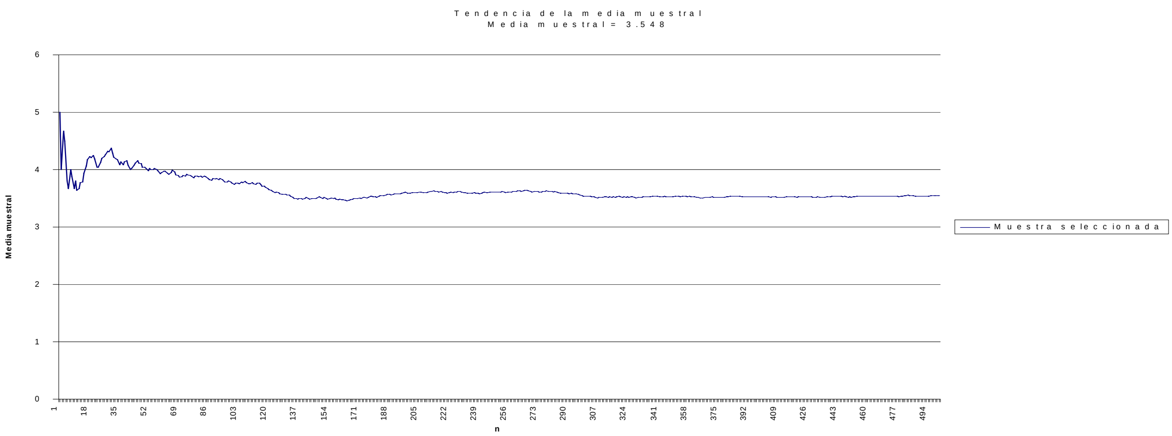
b) Lanza el dado 24 veces y anota los resultados en la tabla. El número de veces que sale cada cara del dado es su frecuencia absoluta. Si dividimos dicho número por el número total de lanzamientos (en este caso 24), obtenemos la frecuencia relativa de ese suceso. Calcula la frecuencia relativa de obtener 5 y la de obtener 3. ¿Cuál es mayor?.

c) El profesor mostrará en la pizarra los resultados de toda la clase. Preparará con ellos una tabla y un gráfico de barras. Compara estos resultados con los vuestros y con la estimación que habéis hecho.

d) Con el fin de apreciar la ley de estabilidad de las frecuencias relativas y comparar los valores de la probabilidad asignados según la regla de Laplace con el correspondiente concepto frecuencial, se recogerán todos los resultados de los distintos grupos en una hoja de registro como la siguiente:

Suceso observado:					
Pareja Nº	Nº de experimentos	Frecuencia absoluta	Nº de experimentos acumulados (N)	Frecuencia acumulada (A)	Frecuencia relativa (A/N)
1					
2					
......					

e) En un diagrama cartesiano se representarán los puntos (N,A/N), número de experimentos acumulados, frecuencia relativa. A pesar de que la ley de estabilidad de las frecuencias relativas es válida sólo cuando n crece indefinidamente, los alumnos podrán apreciar una cierta regularidad o tendencia hacia el valor asignado "a priori", aunque el número de experiencias de clase sea limitado.



3.3. Construcción de dispositivos aleatorios

En esta actividad se proporciona a los alumnos cartulina, tijeras y pegamento para construir dispositivos aleatorios con resultados equiprobables y no equiprobable. La finalidad es que los alumnos distingan los casos en que es posible o no es posible aplicar el principio de indiferencia. Asimismo, les permitirá apreciar la utilidad de la estimación frecuencial de la probabilidad en aquellos casos en que no puede aplicarse dicho principio. En la construcción de estos generadores aparecen conexiones con otros temas, como poliedros regulares y no regulares, desarrollo de poliedros, sector circular. Alternativamente estas actividades podrían plantearse en el estudio de los citados temas.

Actividad 3:
Un dado ordinario se puede construir recortando en cartulina el siguiente perfil

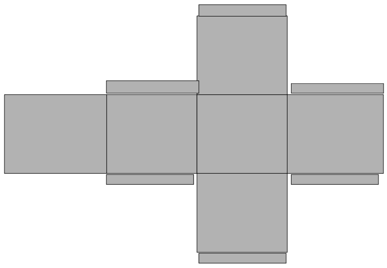
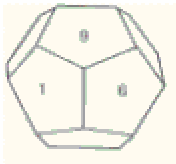


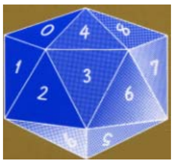
Figura 2

1) Construye un dado recortando en cartulina este perfil, pero numera dos caras con el número 5 y ninguna con el 1.
2) Experimenta con este dado. Enumera, para este caso, el conjunto de todos los resultados posibles. ¿Cuáles son sus probabilidades?

3) Construye un dado, recortando en cartulina el perfil dibujado. Pega un pequeño peso en la cara del 1, por ejemplo, un botón. De este modo hemos construido un dado *sesgado*.¿Qué consecuencias tiene el hecho de que una cara del dado pese más que las restantes? En este caso, obtener un 1, ¿es más, menos o igual de probable que antes? ¿Puedes construir un dado sesgado de tal manera que casi siempre salga el 5?

4) Construye dados sesgados y no sesgados que tengan más de 6 resultados posibles. En las figuras adjuntas presentamos algunos poliedros regulares. Construye dados sesgados y no sesgados con estos poliedros regulares. ¿Cuáles son los poliedros regulares con los que puedes construir dados no sesgados? ¿Podrías construir un dado no sesgado con un poliedro no regular?





Actividad 3:

Construye una ruleta como la que representamos a continuación. Sólo necesitas un trozo de cartulina, un compás para trazar el contorno circular, un bolígrafo como eje de giro y un clip sujetapapeles parcialmente desenrollado.

a) Da un empujón al clip y observa en qué zona se para. Si se detiene en la zona rayada decimos que ha ocurrido el suceso simple R; si se para en la blanca ocurre el suceso simple B. El conjunto de todos los sucesos elementales es, por tanto: E ={ R, B}
b) Si tiramos 40 veces, ¿alrededor de cuántas veces ocurrirá R?; ¿y B?
c) Haz este experimento con un compañero y completa la tabla siguiente:

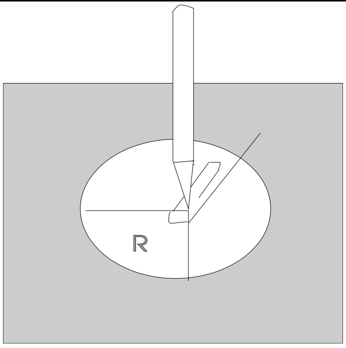
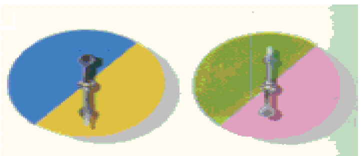
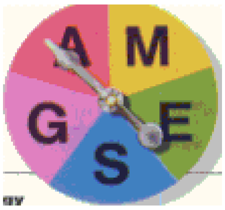


Figura 3

Suceso	Recuento	Nº de veces obtenidos	Frecuencia relativa	Nºde veces esperado
R				
B				
Total		40	1	40

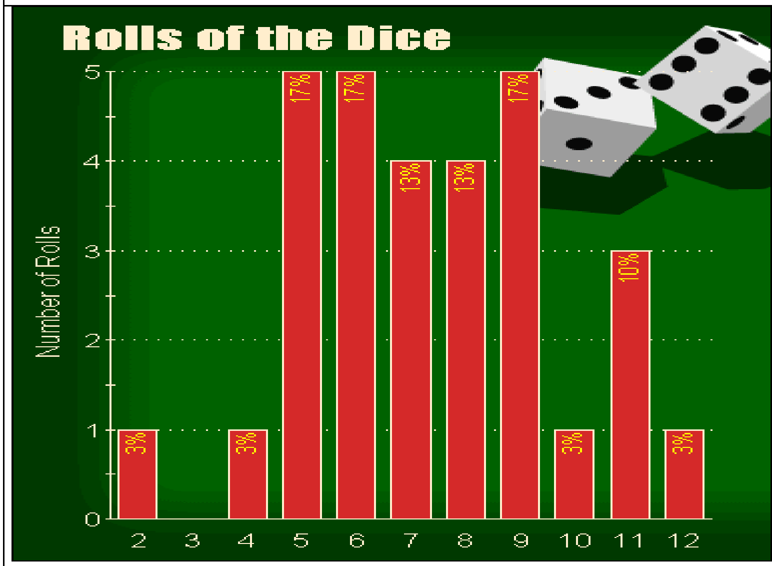
d) Compara tus resultados con los de los otros compañeros.
e) Asigna probabilidades a los sucesos R y B: P(R) = ; P(B) =
f) Inventa juegos de azar basados en los resultados de lanzar las ruletas que reproducimos a continuación





3.4. Recursos en Internet

1. **¿Cuáles son tus posibilidades?**
http://nces.ed.gov/nceskids/probability/dice_handler.asp



Permite experimentar el lanzamiento de dos dados.

Se puede elegir el número de lanzamientos y se representan los resultados de dos formas diferentes:

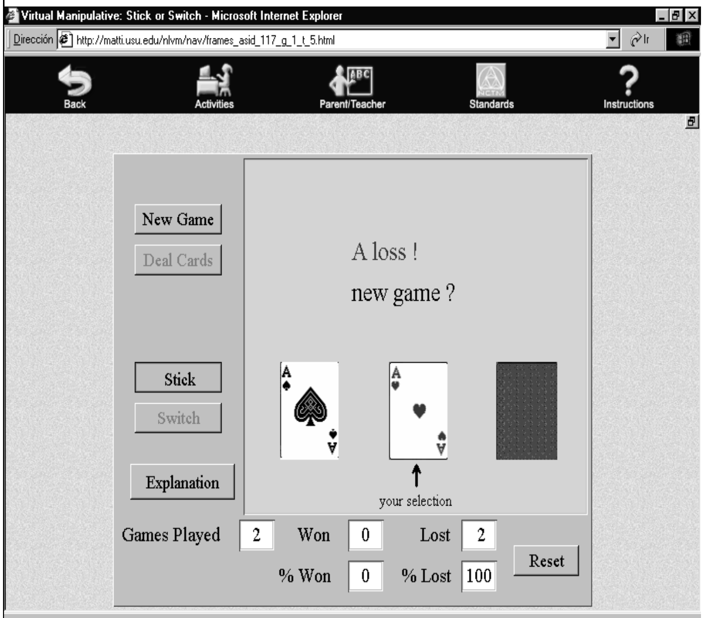
- Mediante una tabla con las frecuencias de cada uno de los resultados posibles en el experimento;
- Con un diagrama de barras de la suma de los dos dados (frecuencias absolutas y porcentajes.

Die1	Die2	Rolls	Die1	Die2	Rolls	Die1	Die2	Rolls
1	1	1	3	1	0	5	1	2
1	2	0	3	2	1	5	2	2
1	3	0	3	3	0	5	3	1
1	4	3	3	4	1	5	4	2
1	5	2	3	5	0	5	5	0
1	6	1	3	6	0	5	6	1
2	1	0	4	1	0	6	1	0
2	2	1	4	2	1	6	2	2
2	3	1	4	3	0	6	3	2
2	4	0	4	4	0	6	4	1
2	5	0	4	5	1	6	5	2
2	6	1	4	6	0	6	6	1

Se puede aumentar el número de experimentos y acumular los resultados.
Este experimento permite plantear preguntas de predicción sobre cuáles sumas son más o menos probables al lanzar los dos dados y contrastar estas predicciones con los resultados. También sirve para analizar el "sesgo de equiprobabilidad" comparando las posibilidades de que los dos números sean iguales o diferentes.

Este experimento podría primero realizarse en la clase con dados reales. Los niños trabajarían por parejas con dados de diferente color (para diferenciar el orden de los mismos) y anotarían sus resultados en una tabla similar a la anterior. Deberían calcular el valor de la suma en cada uno de los casos posibles. Con los datos de toda la clase, se realizaría la gráfica en la pizarra para discutir cuál o cuáles sumas son más probables.

2. **¿Es mejor cambiar?**
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/frames_asid_117_g_1_t_5.html



Permite experimentar con una variante del problema de las tres puertas que consiste en lo siguiente:

Hay que adivinar cuál, entre tres cartas es un Rey. Una vez elegida una de las cartas, se enseña una de las dos restantes (siempre una carta diferente del Rey).

Antes de levantar la carta elegida se ofrece la posibilidad de cambiar a la otra carta que todavia no ha sido descubierta. ¿Cuál es la mejor estrategia, cambiar de carta o conservar la elección inicial?

Se trata de pensar antes de comenzar el juego las posibilidades que tenemos y adivinar cuál es la mejor estrategia. Seguidamente se experimenta el juego con la estrategia elegida o bien con las dos estrategias y se revisa la predicción inicial si es necesario.

Finalmente se trata de razonar por qué la estrategia en cuestión da una mayor probabilidad y también el por qué nos engañan nuestras intuiciones sobre la probabilidad.

4. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE: INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Uno de los estudios más completos de evaluación de la comprensión de la idea de probabilidad en los niños es el de Green. A continuación incluimos algunos de sus ítemes que contemplan tres aspectos diferentes:

- El lenguaje de probabilidad: comprensión de los términos que usamos para referirnos al azar y la probabilidad.
- Razonamiento combinatorio: capacidad de enumerar todos los casos en un experimento aleatorio.
- Razonamiento probabilístico propiamente dicho.

Item 1. Escribe una palabra o frase que signifique lo mismo que:

a) Imposible
b) Posible
c) Igual posibilidad
d) Poca posibilidad
e) Muy probable

Este es un ítem de lenguaje y el orden de dificultad es el siguiente: a) b) d) e) c) para los niños de 11-12 años. Los porcentajes de acierto varían entre el 80% en la parte a) y el 50% en la parte c).

Item 2. En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe en un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero y el profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

a) Es más probable que el nombre sea de un niño.
b) Es más probable que el nombre sea de una niña.
c) Es igual de probable que el nombre sea de un niño o de una niña.
d) No lo se.

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión de la regla de Laplace que en este caso no se aplica al ser los sucesos no equiprobables. El índice de aciertos en los niños de 11-12 años es el 63%.

Item 3. Cuando se lanza un dado, ¿qué número o números son más difíciles de obtener? ¿o son todos iguales?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y evalúa las creencias subjetivas de que algunos números son más difíciles de obtener que otros. Aproximadamente el 20% de los niños de entre 11-12 años piensan que al lanzar un dado el cinco es el número más difícil de obtener.

Item 4. María y Esteban juegan a los dados. María gana un euro si el dado sale 2, 3, 4, 5 o 6. ¿Cúanto debe ganar Esteban para que el juego sea equitativo.

Este es un ítem de razonamiento combinatorio y también evalúa la comprensión de la idea de juego equitativo. Sólo el 45% de los chicos entre 11 y 12 años sabe resolver el problema.

Item 5. Se pidió a algunos niños lanzar una moneda 150 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Anotaron con la letra C la aparición de una cara y con + una cruz. Estos son los resultados de Daniel y Diana:

Daniel: c+c++cc++cc+c+c++c++c+ccc+++ccc++c++c+c+c++cc+ccc+
c+c+cc+++cc++c+c++cc+c++cc+c++cc+cc+c+++c++cc++c++
c+c+cc+c++cc+c+c++ccc+cc++c+c++cc+++c+++c+c++ccc++
Diana: +cc+++c++++c+cc+++cc+cc+++cc+ccc+++c++++++c+c+c+c+
+++cccccc+ccc+c+cc+ccccc+ccc++ccc+c+ccccccccc++c+
ccccccc+++++cccc++c+c+cc+cc+cc++++++c+cc++ccc++ccc
¿Hicieron trampas Daniel o Diana? ¿Por qué?

Este es un ítem de razonamiento probabilístico y solo el 30 % de los niños da la solución correcta (Diana). Los resultados no mejoran en los adultos quienes dan respuestas parecidas. Se supone que Diana hace trampas porque la serie tiene rachas largas, sin embargo, esto es lo que suele suceder en una serie de resultados aleatorios.

Es interesante que los niños, sin embargo, pueden mostrar muchas ideas correctas sobre probabilidad con este ítem, por ejemplo:

- Contar las caras y cruces en cada secuencia y comparar con el resultado teórico ½.
- Argumentar que los resultados aleatorios con impredecibles.
- Argumentar que la secuencia de Daniel es demasiado ordenada para ser aleatoria.

Item 6. La probabilidad de que nazca un varón es 1/2. A lo largo de un año completo, habrá más días en los cuales al menos el 60% de los nacimientos corresponden a varones:

a) en un hospital grande (100 nacimientos al día)
b) en un hospital pequeño (10 nacimientos al día)
c) no hay ninguna diferencia.

Este ítem es de razonamiento probabilístico y evalúa la comprensión del efecto que el tamaño de la muestra tiene sobre un experimento aleatorio. Sabemos que la probabilidad de nacer varón es ½. Este resultado puede variar, pero es más probable que varíe en una muestra pequeña, porque es menos fiable. Por tanto, la respuesta correcta es la b). De nuevo, tanto niños como adultos fallan en este ítem, donde el índice de aciertos es sólo el 20%.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Análisis de textos escolares. Diseño de unidades didácticas

Consigue una colección de libros de texto de matemáticas de 2º y 3er ciclo de primaria (recomendamos buscar los libros que utilizaste personalmente, o bien los de algún familiar o amigo).

1. Busca ejemplos y ejercicios relacionados con las ideas de azar y probabilidad
2. Identifica aspectos del desarrollo del tema en los manuales escolares que consideres potencialmente conflictivos.
3. Describe los cambios que introducirías en el diseño las lecciones propuestas para los cursos 5º y 6º de primaria.

5.2. Análisis de ítems de evaluación y diseño de situaciones didácticas

A. Analizar los conceptos matemáticos puestos en juego en los ítems siguientes y estudiar las posibles interpretaciones erróneas del enunciado así como las posibles concepciones que lleven a una respuesta errónea.

B. Diseñar una situación de aprendizaje que permita concienciar a los alumnos de sus ideas erróneas respecto a estos problemas.

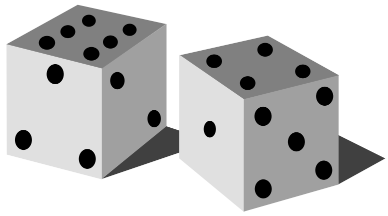
Item 1. La probabilidad de que un niño nazca varón es aproximadamente 1/2. ¿Cuál de las siguientes secuencias de sexos es más probable que ocurra en seis nacimientos?
a) VHHVHV; b) VHHHHV; c) las dos son igual de probables.

Item 2. En dos cajas, etiquetadas como A y B, se introducen las siguientes cantidades de canicas rojas y azules:

Caja	Rojas	Azules
A	6	4
B	60	40

¿Cuál caja da más probabilidad de obtener una bola azul?

Item 3.
a) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable obtener, 5 en uno y 6 en otro, o 6 en ambos dados?
b) Al lanzar una moneda, ¿qué es más probable obtener, cara en una y cruz en otra, o cara en ambas?
c) Al lanzar dos dados, ¿qué es más probable, obtener el mismo número en los dos, o diferentes números?



Item 4. Responde si estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones y por qué:
a) José procura entrar en clase, cada día, poniendo primero el pié derecho. Cree que esto aumenta sus posibilidades de obtener buena nota.
b) Lola rellenó en cierta ocasión un boleto de lotería con los siguientes números: 1, 7, 13, 21, 22, 36, y resulta que ganó. Como consecuencia piensa que debe jugar siempre el mismo grupo de número, porque de este modo ganará.
c) Olivia y Juana van a comprar un billete de lotería y sólo quedan dos números: el 123456 y el 378146. Olivia prefiere jugar al primero porque dice que es más fácil que en un sorteo resulten los números consecutivos. Juana, por el contrario, opina que la lotería es algo azaroso y, por tanto, el número 378146 tiene más posibilidades de salir.
d) Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganada nunca, pero decide continuar por la siguiente razón: “La lotería es un juego basado en la suerte, a veces gano, a veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces, y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima”.

5.3. Análisis de entrevistas a niños

Considera el juego siguiente:
Te propongo un juego, y tú me dices si es justo o no: Con una baraja, vamos a jugar con las siguientes reglas: Sacamos una carta. Si sale una carta de oros, tú ganas 1 pts. y si sale una carta de otro palo distinto, yo gano 1 pts. ¿Es justo?

Analiza la siguiente entrevista a un niño, indicando si su razonamiento es correcto

J.M (10 años, 11 meses): *No, no, porque tú lo tienes más fácil. Si a ti te sale una de bastos, te la llevas, te sale una de copas, te la llevas, te sale una de cualquier cosa que no sea oros y te la llevas.*
E: *Entonces, ¿cómo cambiaríamos el premio para que fuese justo?*
J.M: *Pues, que cada uno se lleve dos palos.*
E: *Bueno, pero en vez de cambiar las reglas de las cartas, vamos a c ambiar el dinero del premio.*
J.M: *Pues, tú te llevas una y yo me llevaría tres.*

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2001). Probabilidad. En, E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 591-619)). Madrid: Síntesis.
Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. *J.* (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.
Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO, 14*, 99-114.
Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 2-16 years. In D. R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). Universidad de Sheffield.
Pérez, P. (1995). Actividades de probabilidad para la enseñanza primaria. *UNO,* 5, 113-122.
Sáenz, C. (1999). *Materiales para la enseñanza de la teoría de probabilidades.* Madrid: ICE de la Universidad Autónoma.

VII.

DIDÁCTICA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Vicenç Font

Índice

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

En los documentos curriculares españoles (Diseño Curricular Base y Decreto de Primaria del MEC) no se hace mención a contenidos que puedan sugerir nociones o actividades propias del inicio del razonamiento pre-algebraico. Esta situación contrasta con las propuestas contenidas en los Principios y Estándares 2000 del NCTM.

En las tablas 1 y 2 incluimos las expectativas formuladas por los Principios y Estándares 2000 sobre el bloque de Álgebra para los grados K-2 y para los grados 3-5. Como se observará no se trata que los estudiantes de estos niveles realicen manipulaciones de símbolos algebraicos, que con frecuencia es a lo que se reduce el aprendizaje del álgebra en secundaria.

Tabla 1:

Estándares de contenido	*En los grados K-2 todos los alumnos deberán,*
Comprender patrones, relaciones, y funciones	- clasificar y ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades; - reconocer, describir, y continuar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples, y pasar de una representación a otra.
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos	- Ejemplificar principios y propiedades generales de las operaciones, tales como la conmutatividad, usando números específicos. - usar representaciones concretas, gráficas y verbales para mejorar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	- modelizar situaciones que impliquen la adición y sustracción de números naturales, usando objetos, dibujos, y símbolos.
Analizar el cambio en diversos contextos	- describir cambios cuantitativos, tales como el mayor crecimiento de un alumno; - describir cambios cuantitativos, tales como que un alumno crece dos centímetros en un año.

Estándares de contenido	*En los grados 3-5 todos los alumnos deberán,*
Comprender patrones, relaciones, y funciones	- describir, continuar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos; -representar y analizar patrones y funciones, usando palabras, tablas y gráficos.
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos	- identificar propiedades tales como la commutativa, asociativa, distributiva y usarlas para calcular con números naturales, - representar la idea de variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo; - expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	- modelizar situaciones problemas con objetos y usar representaciones tales como gráficos, tablas, y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en diversos contextos	- investigar cómo el cambio en una variable se relaciona con el cambio en otra;

	- identificar y describir situaciones con tasas de variación constante o variable y comparalas.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE

El tipo de experiencias que tienen los niños con la aritmética es importante para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la "aritmética generalizada".

El concepto matemático que hace posible esa generalización es el de *variable*. El uso de variables, tales como x e y en el enunciado $y = 5x + 12$, no es más que una generalización de una relación aritmética. Expresa la relación numérica general que un número es 5 veces otro número más 12. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. La enseñanza de la aritmética queda incompleta y deficiente si no se le imprime una orientación hacia la generalización.

2.1. Estadios en la comprensión de las variables

En la sección 4 (parte B) hemos distinguido dos etapas con relación al uso de los símbolos matemáticos. Esta primera clasificación se ha matizado y desarrollado en diferentes investigaciones[1] que han determinado que los alumnos progresan en su comprensión del uso de letras y el dominio de las variables según ciertos estadios o niveles.

Estadio 1: Letra evaluada

El niño asigna un valor numérico a las letras desde el principio. Si se pregunta al niño, "Si $5 + 2x = 13$, ¿cuánto vale x?", dirá que 4, sin que seguramente haga ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental. Un ejercicio tal como $11 - y = 6$ se resuelve simplemente recordando la tabla de sumar, $6 + 5 = 11$.

Estadio 2: Letra ignorada

El niño ignora la presencia de la letra, o no le da ningún significado. Si se le pregunta el valor de $a + b + 2$ cuando se sabe que $a+b$ es igual a 27, el niño puede responder 29 sin pensar en ningún momento sobre la a, la b o la suma $a+b$.

Estadio 3: Letra usada como objeto

La letra es considerada como un objeto concreto. La frase matemática $3m + 7m$ y la frase "tres manzanas y siete manzanas" se consideran como equivalentes. La letra m se ve como la abreviatura del nombre de un objeto particular. Esto ocurre especialmente en problemas donde se involucran objetos concretos como lápices, mesas, etc., y es esencial distinguir entre los objetos y las cantidades de los mismos.

Estadio 4: Letra usada como incógnita específica

Los niños consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente. "¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?" La respuesta esperada, $4+3n$, requiere considerar n como incógnita genuina, pero los niños en este estadio pueden dar como solución $3n$ y 4, $7n$, o 7, en las que los elementos que

[1] Kuchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), Children's understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119). London: John Murray.

intervienen son combinados sin tener en cuenta la presencia de la letra.

Estadio 5: Letra usada como un número generalizado

Una letra se ve como representando varios valores diferentes en lugar de uno solo. Si se pregunta a los niños que listen todos los valores de A cuando $A + B = 10$ podemos encontrar que ofrecen uno o varios números que cumplen la condición, pero no reconocen la necesidad de listar todos los valores.

Estadio 6: Letra usada como variable

La letra se ve como representando un rango de valores no especificados. Si se pregunta, ¿qué es mayor $3n$ o $n+3$? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no especificados y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los niños prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado (estadio 5). Pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, entonces decimos que están en el estadio 6 y tratan la letra como variable.

2.2. Comprensión de las ecuaciones y del signo igual

Las dificultades que tienen los alumnos en el uso de las variables en el contexto de la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad. La característica fundamental de una variable - que puede tomar valores diferentes pertenecientes a un cierto dominio de sustitución - difiere de la orientación que se desarrolla con las experiencias iniciales en la resolución de ecuaciones. Para resolver una ecuación los niños manipulan u operan con las variables como si fueran números. Con frecuencia esto se hace antes que logren un nivel apropiado de uso de las letras que les permita comprender lo que están haciendo con las variables.

Diversos estudios muestran que las interpretaciones que hacen los niños del signo = y de las ecuaciones pueden diferir de las que pretendemos en la enseñanza. Por ejemplo, los alumnos piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, $2 + 3 = 5$, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones "2+3" y "5". Los alumnos piensan que cambiando la letra en una ecuación puede cambiar la solución; podemos encontrar que los alumnos dan soluciones diferentes a estas dos ecuaciones: $7X + 3 = 28$, y $7B + 3 = 38$; algunos alumnos pueden argumentar que X es mayor porque está más al final del alfabeto que B.

La mayor parte de los profesores y los libros de texto proponen a los alumnos la realización de ejercicios consistentes en encontrar un número que operado con otro dé un cierto resultado, por ejemplo, $3 + \_\_ = 5$. El espacio en blanco (o la caja que suele escribirse) se presenta como un único valor desconocido, y no como una variable, lo que convertiría la expresión en una función proposicional en la que la variable puede tomar muchos valores diferentes, obteniendo en cada caso una proposición. El profesor puede aprovechar este tipo de situaciones para ampliar el significado del signo = y el uso de las variables. Una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. Esto ayudará a los alumnos a superar su idea de que el signo = es una indicación de realizar un cálculo.

2.3. Algunas dificultades de aprendizaje

La experiencia de los profesores y los resultados de diversas investigaciones muestran que el álgebra resulta un tema difícil.

En el apartado 2.1 hemos descrito cinco estadios o tipos de usos de las letras que en cierto modo son previos al dominio de las letras como variables, y que indican dificultades en su plena comprensión. Otras dificultades están relacionados con el uso de las notaciones.

El uso de notaciones, tanto en aritmética como en álgebra, se basa con frecuencia en convenios ambiguos, lo que puede explicar las dificultades en el aprendizaje. Se usan expresiones similares que tienen significados muy diferentes en aritmética y en álgebra. Por ejemplo, 27 y $2x$. El 2 de 27 indica el lugar de las decenas y, por tanto, representa 20. Sin embargo, $2x$ significa que el 2 multiplica a la x. El signo de multiplicar con frecuencia se omite, y cuando se pone puede confundirse con la letra equis (x).

Puede ocurrir que el alumno no entienda correctamente ninguna de las dos expresiones: 27 puede ser interpretado sin tener en cuenta las reglas del sistema de numeración posicional, y visto como el nombre de una cierta cantidad de unidades; $2x$ es otra yuxtaposición de signos, una "palabra" que significa dos equis, y no como una multiplicación. Las cosas se pueden complicar incluso más cuando escribimos, $27x$, ya que hay que tener en cuenta el convenio multiplicativo que relaciona 27 con x, y el convenio posicional que relaciona el 2 y 7. En el contexto algebraico escribimos ab para indicar el producto $a \cdot b$, pero en aritmética $3 \cdot 5 \neq 35$. De igual modo, $ab = ba$, pero $35 \neq 53$; $4 + 0{,}75 = 4{,}75$, pero $2x + y \neq 2xy$.

Una de las repercusiones de un estudio poco significatico de las ecuaciones en secundaria es la generación de errores en el cálculo con fracciones a alumnos que antes no los tenían. Este tipo de error se manifiesta en muchos de los estudiantes para maestro, los cuales eliminan denominadores en situaciones en las que no se debe hacer. Muchos alumnos que resuelven ecuaciones correctamente, pero sólo tienen un conocimiento instrumental que les permite resolverlas sin saber porqué se resuelven de esta manera y no de otra, consideran que en una ecuación "los denominadores se van". A pesar de esta falta de comprensión estos alumnos pueden resolver la mayoría de ecuaciones correctamente, lo cual reafirma su convicción de que "los denominadores se van". Es frecuente que estos alumnos ante un cálculo con fracciones del tipo:

$$1/2 - 2/3 + 4/5 =$$

haga lo siguiente:

$$15/30 - 20/30 + 24/30 = 19$$

y si se le pregunta el motivo por el cual ha eliminado los denominadores conteste: "los denominadores se van". Este fenómeno se puede observar incluso en alumnos que antes de empezar a estudiar las ecuaciones no cometían este tipo de error al efectuar operaciones con fracciones

3. SITUACIONES Y RECURSOS

En esta sección incluimos una colección de tipos de situaciones utilizables en primaria para el desarrollo del razonamiento pre-algebraico clasificadas en cuatro categorías:

- Comprensión de patrones, relaciones y funciones.
- Representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando

símbolos algebraicos.

- Uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Análisis del cambio en contextos diversos.

3.1. Comprensión de patrones, relaciones y funciones

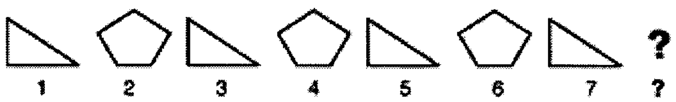
Un contexto adecuado para iniciar a los alumnos desde preescolar en el razonamiento algebraico y funcional es proporcionarles secuencias de figuras u objetos que siguen un cierto orden o regularidad (seriaciones, cenefas, etc.).

La actividad consiste en identificar el modelo o patrón que sigue la secuencia, describirla introduciendo símbolos y hacer predicciones sobre el tipo de objeto o figura que ocupará un lugar dado de la secuencia.

Los alumnos pueden trabajar bien individualmente o en grupos extendiendo patrones construidos con materiales simples como botones, bloques lógicos, cubos encajables, palillos, formas geométricas, etc. El núcleo o unidad de un patrón de repetición es la cadena más corta de elementos que se repiten.

Situaciones

1.Emparejamiento de números con una secuencia de figuras



- ¿Cuál es la segunda figura?; Para continuar el mismo patrón, ¿qué figura vendrá a continuación? ¿Qué observas en los números que están debajo de los triángulos? ¿Qué figura corresponderá al número 14?

2. Coste de cantidades de un artículo

Número de globos	1	2	3	4	5	6	7
Coste de los globos en cents.	20	40	60	80	?	?	?

- ¿Cuánto costarán 7 globos?

3. Patrones en tablas numéricas

- Si cuentas de 3 en 3 en una tabla-100, comenzando en 24, y marcas los números que vas obteniendo. ¿qué número marcarás después de 3 saltos? ¿Y si comienzas en el 45?

- Si comienzas a contar en el 6 de 3 en 3, ¿marcarías el número 87?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

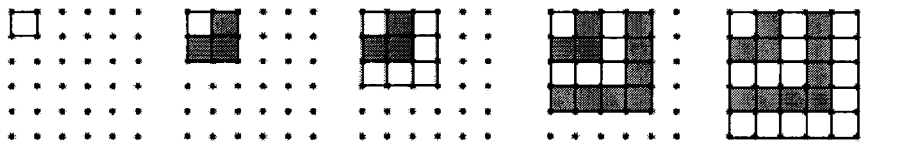
- En la tabla-100, tomamos un cuadrado formado por cuatro números, por ejemplo,

4	5
14	15

Observamos que 4 + 15 = 5 + 14. ¿Es válida esta propiedad para todos los cuadrados 2 x 2 de la tabla. Enunciarla y justificarla.

- ¿Es cierta esta propiedad para las tablas de sumar y de multiplicar?

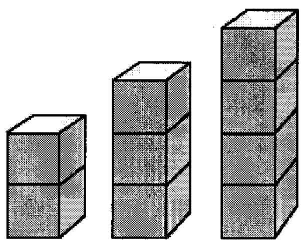
4. Crecimiento de cuadrados



1   1+3=4   1+3+5=9   1+3+5+7=16   1+3+5+7+9=25

- Describe el patrón que se muestra en la figura mediante lenguaje matemático. ¿Qué ocurrirá si la serie se continúa? ¿Cómo se puede expresar el tamaño del cuadrado final si la serie se continúa *n* veces?

5. Área total de las torres



- ¿Cuál es el área total de cada torre de cubos (incluyendo la base)? ¿Cuál es el área total de una torre con 5 cubos? ¿Cómo cambia el área a medida que la torre se hace más alta? ¿Cuántos cubos habrá en la torre si el área es 242 unidades cuadradas?

6. ¿Qué compañía telefónica es preferible?

Telefónica ofrece un servicio de móviles con un coste fijo de 20 euros al mes más 0.10 euros por minuto de llamada. *Amena* no carga cuota fija mensual pero carga 0.45 euros por minuto. Ambas compañías facturan exactamente el tiempo usado en segundos, sin redondear al minuto más próximo. ¿Qué compañía es preferible según el tiempo previsto de llamadas mensuales?

(Se sugiere preparar una tabla y un gráfico)

Ejercicio de análisis didáctico

1. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.2. Representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos

Una manera razonable de hacer que los alumnos comiencen a usar variables como incógnitas y a resolver ecuaciones es a partir de las situaciones siguientes:

Situaciones

7. Leer el enunciado de un problema verbal, pero omitir la pregunta. La tarea consiste en escribir una ecuación que signifique lo mismo.

Por ejemplo, "Hay 3 cajas llenas de lápices y 5 lápices más. En total hay 41 lápices se puede escribir en la forma: (3 · __ + 5 = 41).

La actividad se puede invertir dando una ecuación con una incógnita y pedir a los alumnos que inventen una historia que se ajuste a la ecuación.

8. Pedir a los alumnos que hagan la siguiente secuencia de operaciones

- Escribe un número
- Súmale el número que le sigue
- Suma 9 al resultado anterior
- Divide por 2
- Resta el primer número

Mostrar que siempre se puede "adivinar" el resultado final. Pedir que expliquen el resultado usando una variable para el número inicial.

9. Escribir un número entre 1 y 9, multiplicarlo por 5, sumarle 3, multiplicarlo por 2, sumarle otro número entre 1 y 9, restar 6. Preguntar a los alumnos qué se obtiene y por qué.

10. Escribir un número, multiplicarlo por 6, sumar 12, dividir por 2 el resultado anterior, restar 6, dividir por 3. Preguntar a los alumnos qué se obtiene y por qué.

11. El profesor escribe en la pizarra las siguientes instrucciones:

1) Escribe un número cualquiera en un folio
2) Suma ocho a ese número
3) Duplica la suma obtenida
4) Réstale 6

5) Divide por dos

6) Resta al resultado anterior el número elegido en el paso 1)

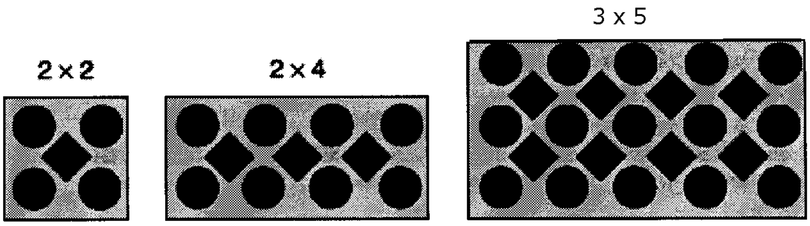
El profesor dice que es capaz de adivinar el resultado final para cualquier número que se escriba en el paso 1). Efectivamente, los alumnos practican el juego y el profesor siempre acierta.

¿Cuál es el resultado que se obtiene después de hacer los pasos 1) a 6)? ¿Cómo lo has descubierto?

12. Escribe tres números consecutivos, eleva al cuadrado el número de en medio, y resta del cuadrado el producto de los otros dos números. Compara el resultado que se obtiene para distintas ternas de números consecutivos. ¿Se obtiene siempre el mismo resultado para cualquier terna de números consecutivos? Justifica esta propiedad usando un razonamiento algebraico.

13. La caja de bombones y caramelos

Una compañía empaqueta cajas de bombones intercalando un caramelo por cada cuatro bombones, según se muestra en la figura. Los círculos representan los bombones y los cuadrados los caramelos. Las dimensiones de la caja se indican mediante el número de columnas y de filas de bombones que hay en cada caja. Desarrolla un método para encontrar el número de caramelos en cualquier caja si se conocen sus dimensiones. Explica y justifica el método usando palabras, diagramas o expresiones con letras.



Ejercicio de análisis didáctico

2. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.3. Uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

La igualdad como equivalencia

En la expresión $4A + 5 = A - B$, el signo igual significa que el valor numérico de la expresión de la izquierda es el mismo que el de la derecha (en el contexto de la medida de cantidades, que ambos miembros expresan la misma cantidad). Para comprender las expresiones algebraicas de esta manera los alumnos deben interpretar las expresiones aritméticas tales como 4 + 5 o 5·98 como valores numéricos, no como operaciones pendientes de realizar. Los alumnos interpretan el signo = como un operador, como si fuera la tecla = de una calculadora, lo que dificulta pensar en 5 + 2 como una manera alternativa de escribir 7. Las siguientes actividades pueden facilitar la comprensión de la igualdad como equivalencia:

Situaciones

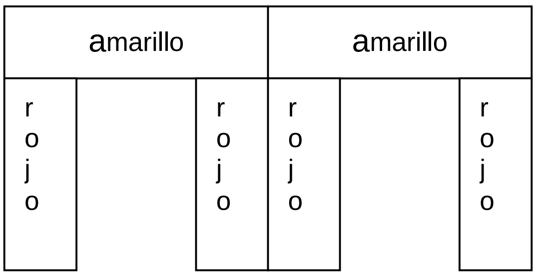
14. Encuentra diferentes maneras de expresar un número particular, por ejemplo 10. Dar algunos ejemplos: 5 + 5 , o 14 -4. Sugiere el uso de dos o más operaciones diferentes. "¿Cuántas maneras diferentes existen de expresar el 8 usando números menores que 10 y tres operaciones?"

15. El modelo de la balanza.

Si en una balanza de dos platillos ponemos objetos cuyos pesos tengan como medidas numéricas los resultados de las operaciones aritméticas: $(3 \cdot 4) + 2$ y $2 \cdot 7$, respectivamente, la balanza quedaría en equilibrio. En cambio, $(3 \cdot 9) + 5 < 6 \cdot 8$, la balanza se inclinará al lado en que se ponga el peso cuya medida sea $(3 \cdot 9) + 5$. ¿Para qué valores de __ y Δ estará la balanza en equilibrio si en un platillo ponemos pesos cuyas medidas responden a la expresión, 3 ·__ + Δ y en el otro a la expresión $2 \cdot \Delta - 4$?

16. Puente con dos apoyos[2]

Queremos construir la maqueta de un acueducto con barras de madera de 5 cm para las vigas y de 2 cm para los soportes, según se muestra en el dibujo, para el caso de dos arcadas.



1) Completa la tabla siguiente

	3 arcos	4 arcos	5 arcos	15 arcos	21 arcos
¿Cuántas barras amarillas necesitamos?					
¿Cuántas barras rojas necesitamos?					
¿Qué longitud tendrá el acueducto?					

2) Si se conoce el número de arcos, ¿qué regla podemos aplicar para calcular a) el número de barras, y b) la longitud del acueducto?.

[2] Baroody, A. y Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. London: Lawrence Erbaum Ass.

3) ¿Cuál es el número total de barras que se necesitan para construir un acueducto con 100 arcos? ¿Cuál es la longitud del acueducto? Explica la respuesta.

Ejercicio de análisis didáctico

3. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.4. Análisis del cambio en contextos diversos

Siempre que los alumnos preparan tablas con los valores correspondientes a cantidades de dos magnitudes relacionadas ponen en juego la idea de variación conjunta: un valor cambia con relación a otro. Se trata de ejemplos de funciones, reglas que determinan la manera en que dos variables se relacionan.

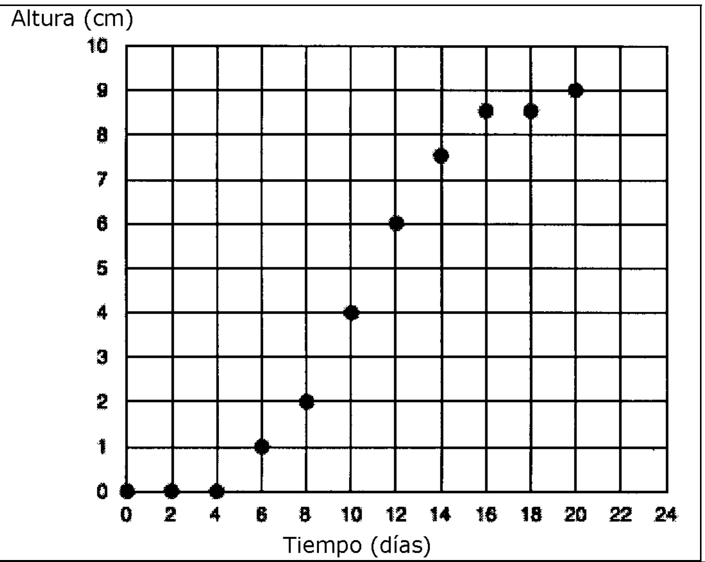
Incluso en preescolar los niños pueden preparar gráficas o tablas mostrando, por ejemplo, el número de manos para distintos números de niños. Para 2 niños 4 manos, 3 niños 6 manos, etc. En el ciclo superior los alumnos pueden relacionar el número de artículos comprados y el coste de los mismos. En las actividades de medición se pueden hacer tablas y gráficos que relacionan las medidas de las longitudes de los bordes de objetos circulares con los diámetros, o el volumen o el área y la base del cilindro.

Situaciones

17. Crecimiento de una planta

En la tabla adjunta se muestra la altura de una planta (en cm) a medida que se incrementan los días desde que se plantó. ¿Cómo ha sido el crecimiento de la planta?

Días	Altura	Cambio
0	0	
2	0	0
4	0	0
6	1	1
8	2	1
10	4	2
12	6	2
14	7.5	1.5
16	8.5	1
18	8.5	0
20	9	0.5



Ejercicio de análisis didáctico

4. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

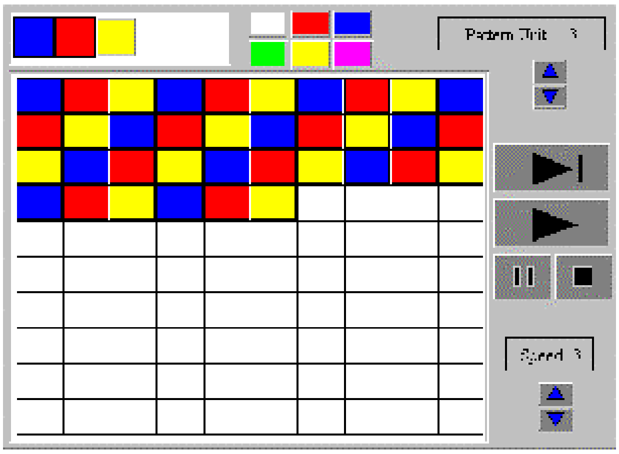
4. RECURSOS EN INTERNET

Creación, descripción y análisis de patrones para reconocer relaciones y hacer predicciones.

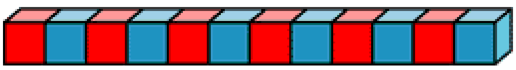
Este recurso interactivo, disponible en el siguiente sitio web de los Estándares 2000 del NCTM,

http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.1/index.htm#applet

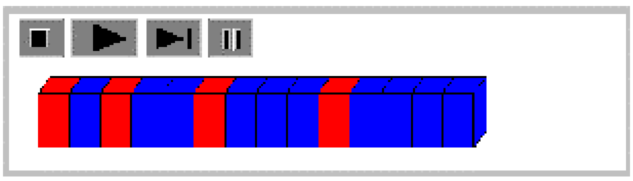
permite al profesor de primaria proponer la construcción de patrones en forma de frisos y recubrimientos del plano mediante secuencias de teselas cuadradas de distintos colores.



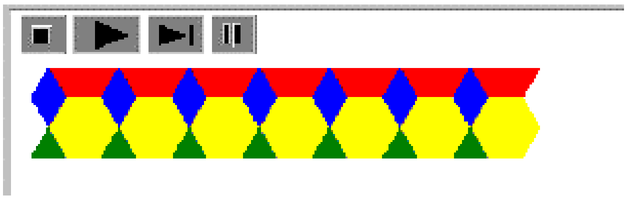
El objetivo es que los alumnos analicen relaciones y hagan predicciones. Este micro-programa interactivo tiene tres partes. En la primera, “Construcción de patrones”, el usuario puede generar recubrimientos de una cuadrícula 10x10 con teselas rectangulares formadas por cuadrados de hasta cinco colores diferentes, pudiendo combinar los colores a voluntad. Se trata de prever la secuencia que se va formando y comprobarla. En la segunda parte, "descripción de patrones", se presentan secuencias de cubos encajables con el fin de que los alumnos describan la regla que sigue la secuencia.



Se pueden proponer también patrones crecientes.



En la tercera parte, "Ampliación de la comprensión de patrones", propone analizar patrones formados por teselas unitarias construidas a partir de otras piezas más simples. Se comienza a relacionar dos patrones mediante una relación funcional.

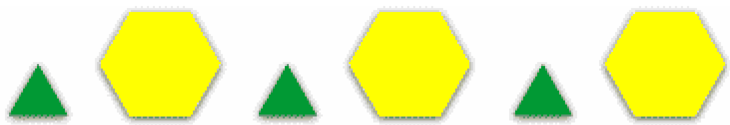


Se pueden plantear tres tipos de cuestiones:

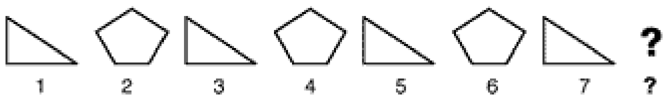
- ¿Cuántos cuadrados hay en tu patrón unidad?
- ¿Cuántas veces puedes repetir el patrón unidad en una fila?
- ¿Cabe exactamente el patrón en una fila?
- ¿Qué ocurre si añadimos (o quitamos) al patrón una unidad más?

La actividad permite a los alumnos explorar la divisibilidad de 10 por 2, 3, 4 y 5. El micro-programa interactivo proporciona un entorno que facilita la construcción de patrones repetitivos y reflexionar sobre la idea de una unidad que se repite.

El trabajo con patrones construidos mediante secuencias de figuras geométricas también se puede hacer con material manipulativo, usando piezas de forma poligonales como se muestra en la figura:



La idea de función se puede poner en juego asociando a las secuencias de figuras la serie de números naturales:



Se pueden plantear cuestiones que inducen a los alumnos a buscar relaciones: ¿Qué figura sigue después del 2? Si queremos continuar la serie, ¿qué figura irá después? ¿Puedes prever la figura que irá con el 12?

Ejercicios de análisis didáctico

5. Da un ejemplo de cada uno de los tres usos diferentes de variables. Para cada uso, describe al menos una actividad que promueva la comprensión por los estudiantes de dicho uso.

6. Describe cómo se puede desarrollar el concepto de función mediante el uso de patrones de crecimiento, situaciones del mundo real, y experimentos. Indica cómo se pueden utilizar diversas representaciones en cada método.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Entrevistas a niños

Diseña una situación en la que los alumnos tengan que encontrar primero invariantes y después simbolizarlos. Prepara y realiza entrevistas a una muestra de alumnos de distintas edades para comprobar la progresión en el aprendizaje del uso de letras en tareas matemáticas.

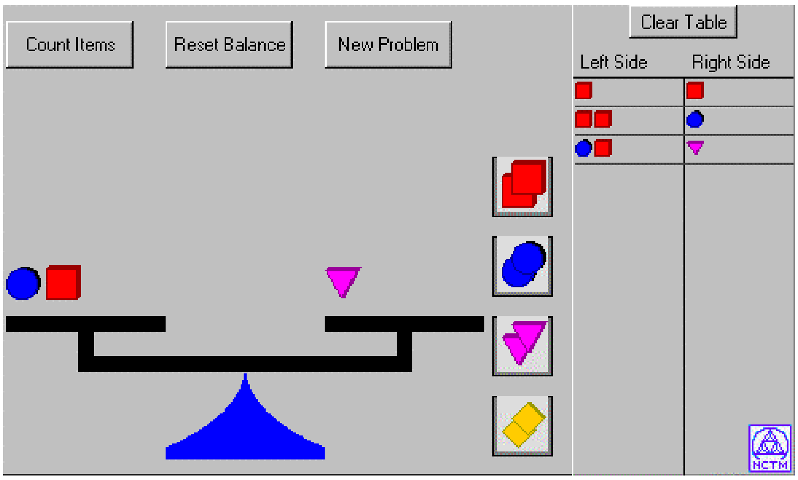
5.2. Análisis de textos escolares y recursos

1. Analiza el tratamiento de los patrones en un libro de texto de uno de los ciclos de primaria. ¿Consideras que las actividades incluidas estimulan el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo? En caso negativo, ¿cómo se podrían modificar las actividades para dicho fin?

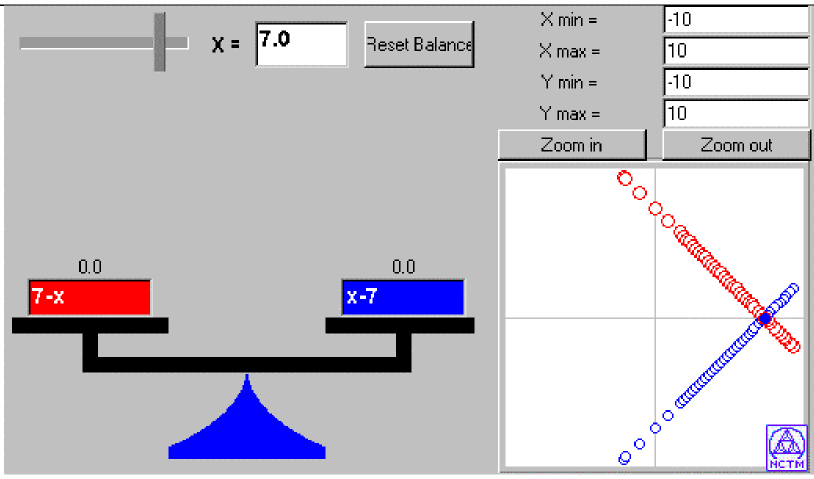
2. En Internet hemos encontrado un micro-programa interactivo que se propone como recurso para el aprendizaje del significado de la igualdad como equivalencia, basado en el equilibrio de la balanza de platillos. Uno de los módulos simula la colocación de figuras con distintas formas y colores que pueden colocarse en ambos platillos (ver figura a continuación). En la pantalla que reproducimos, se ve que dos figuras rojas puestas en el lado izquierdo se equilibran con una triangular en el derecho; un círculo azul y un cuadrado rojo se equilibran con un triángulo rosa.

Como sabemos la balanza es un dispositivo que se usa para medir cantidades de peso, por lo que aquí se hace un uso atípico de este dispositivo. Estudia los posibles conflictos cognitivos que puede inducir el uso de este recurso y la forma de resolverlos.

Balanza con formas



3. Otro módulo del micro-programa anterior disponible en Internet utiliza el modelo de la balanza como recurso didáctico para introducir la noción de variable y la igualdad, entendida como equivalencia de dos expresiones algebraicas con una variable evaluada para distintos valores de dicha variable.



Balanza con expresiones algebraicas

En este caso los "pesos" que se colocan en cada platillo son, o números reales, o dos expresiones algebraicas que son evaluadas para valores de x dentro de un cierto intervalo. En la figura se indica que $7 - x = x - 7$, para $x = 7$. Simultáneamente el micro-programa muestra la gráfica cartesiana de las rectas de ecuación $y = 7 - x$; $y = x - 7$. Ambas rectas se cortan en el eje de abscisas para $x = 7$.

- ¿Qué interpretación hay que atribuir a los números y expresiones que se ponen en cada platillo para que tenga sentido el uso de la balanza?
- ¿Piensas que este recurso puede ser usado como herramienta de exploración personal del alumno? ¿Qué tipo de explicaciones consideras necesarias por parte del profesor para que el alumno entienda el funcionamiento del dispositivo?
- ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego?

Bibliografía

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
Ruiz, F. (2001). Números y formas. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (p. 449-476). Madrid: Síntesis.
Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M. y Fernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.